ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2017

prépa

2

Mathématiques

Option Économique

Mercredi 12 avril 2017 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 6 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Etude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, 1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$
6. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

9. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :
   $$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$
   où a, b et c sont trois réels.
   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.
10. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.
11. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0, \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.
2. Etudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
   On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.
3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
   Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$ par :
$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
5. Calculer les dérivées partielles premières de f.
6. Démontrer que pour tout $(x,y) \in U$:
   $$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$
7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.
   Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$.

Tournez la page s.v.p.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.
9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.
11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?
12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec n=10, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2,4,1,5,9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
   (b) Calculer $P(T_n = 1)$.
   (c) Montrer que :
$$P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$
3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j).$$

7.(a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.

   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

   (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!], \quad P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$

   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

8.(a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.
   (b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(T_n > k) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $E(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.
10. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n \geqslant 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.
   (a) Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}.$$

13. Démontrer alors que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.
14. On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1,n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

```
function y=T(n)
    S=..............
    y=..............
    while ..........
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S=S+tirage
        y=..........
    end
endfunction
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

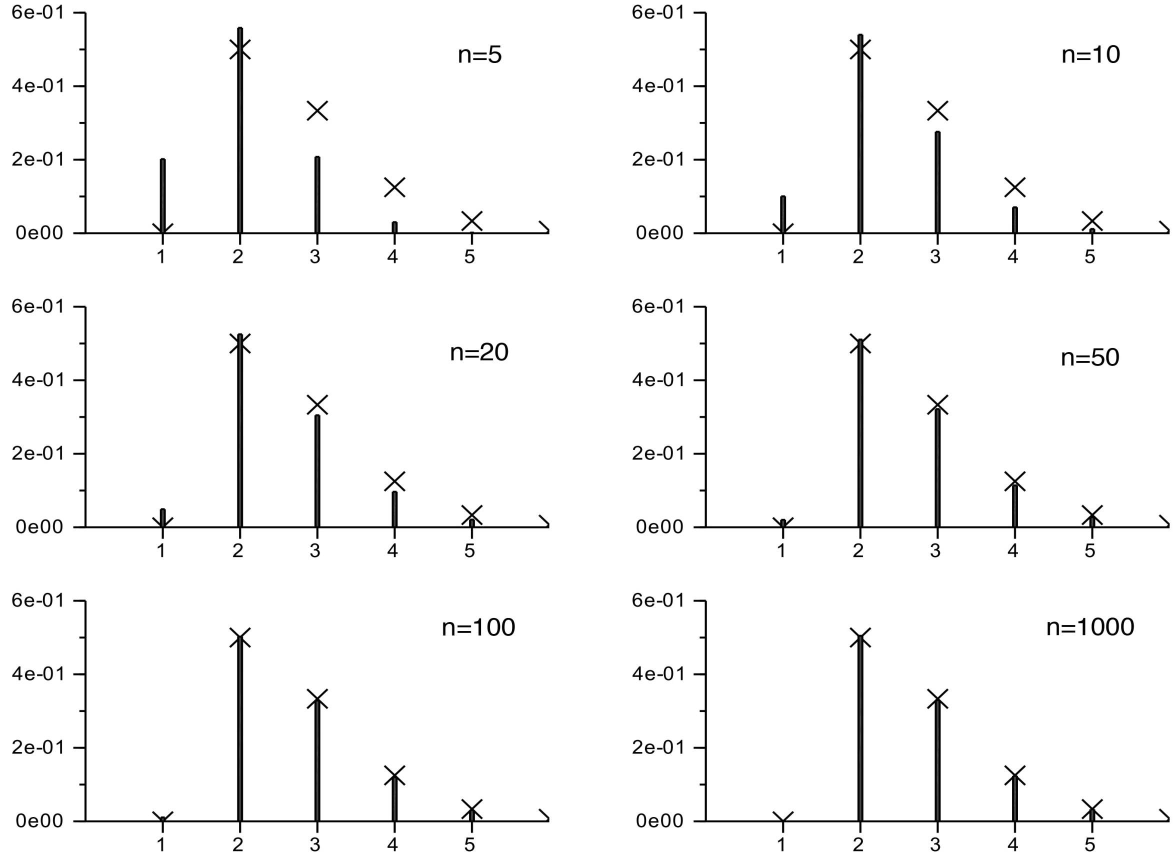
```
function y=freqT(n)
    y=zeros(1,n)
    for i=1:100000
        k=T(n)
        y(k)=y(k)+1
    end
    y=y/100000
endfunction

function y=loitheoY(n)
    y=zeros(1,n)
    for k=1:n
        y(k)=(k-1)/prod(1:k)
    end
endfunction

clf
n=input('n=?')
plot2d(loitheoY(6),style=-2)
x=freqT(n)
bar(x(1:5))
```

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous :

L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous :



(a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

(b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question 13.

2017

CORRIGÉ

matière

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

OPTION ECONOMIQUE

CONCOURS ECRICOME PREPA

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.

Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème)

Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé,

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A : Etude de la matrice A

1. $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(A-I)^3 = 0$.

2. Soit $P(X) = (X-1)^3$. D'après ce qui précède, P est un polynôme annulateur de A, donc le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P. Or, 1 est la seule racine de P, donc 1 est l'unique valeur propre possible de A.
De plus, la matrice $A-I$ n'est pas inversible (si elle l'était, en composant trois fois l'égalité : $(A-I)^3 = 0$ par $(A-I)^{-1}$, on obtiendrait $I_3 = 0$, ce qui est absurde), donc 1 est bien valeur propre de A.
Ainsi 1 est l'unique valeur propre de A.

3. 0 n'est pas valeur propre de A, donc A est inversible.

   Supposons que A soit diagonalisable. Alors il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Mais 1 est l'unique valeur propre de A, donc $D = I_3$ et $A = PI_3P^{-1} = I_3$, ce qui est manifestement faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

Partie B : Recherche d'une solution particulière

4. La fonction $f : x \mapsto 1+x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, donc par composition, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$.

   $\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ et $\varphi''(x) = -\dfrac{1}{4(\sqrt{1+x})^3}$. Donc $\varphi'(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\varphi''(0) = -\dfrac{1}{4}$.

5. On obtient alors, d'après la formule de Taylor-Young :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to} \varepsilon(x) = 0$$

6. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (P(x))^2 = \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right)^2 = 1 + x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4$

7. D'après la question 1, $C^3 = 0$ et a fortiori : $C^4 = 0$, donc il reste : $(P(C))^2 = I_3 + C = A$.

   On a bien : $(P(C))^2 = A$. Il reste alors à poser : $M = P(C) = I_3 + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2$ et on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 5/4 & -1/4 & 1 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

CONCOURS ECRICOME PREPA

Partie C : Résolution complète de l'équation

8. (a) $v = (1, 1, -3)$ et $u = (-6, -6, 0)$.

   (b) Soient a, b et c trois réels tels que : $au + bv + cw = 0$.

   On a alors : $\begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -6a + b = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -6a + b + c = 0 \\ -c = 0 \\ -3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$

   Ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre à trois éléments de $\mathbb{R}^3$. Et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Par calcul (ou en remarquant que $u \in E_0(A)$ si celui-ci a été déterminé), on obtient : $f(u) = u$.
   Et $u = f(v) - v$, donc $f(v) = u + v$. Enfin, $v = f(w) - w$, donc $f(w) = v + w$.
   Ainsi,

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T?$$

   (d) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On sait que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A$ et que $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = T$, donc d'après la formule de changement de base : $\boxed{T = P^{-1}AP}$.

9. (a) Si $N^2 = T$, alors $NT = NN^2 = N^3 = N^2N = TN$. Posons alors : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$NT = TN \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a + d \\ a + b = b + e \\ b + c = c + f \\ d = d + g \\ d + e = e + h \\ e + f = f + i \\ g = g \\ h + i = i \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{cases}$. Donc N est de la forme : $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

   (b) On résout alors : $N^2 = T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & 2ac + b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ 2ac + b^2 = 0 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1/2 \\ c = -1/8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1/2 \\ c = 1/8 \end{cases}$.

   Ainsi, l'équation : $N^2 = T$ a deux solutions : $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N_2 = -N_1$

10. Soit M une matrice. On a alors :

$$M^2 = A \Longleftrightarrow P^{-1}M^2P = P^{-1}AP \Longleftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = T \Longleftrightarrow \begin{cases} P^{-1}MP = N_1 \\ \text{ou} \\ P^{-1}MP = N_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} M = PN_1P^{-1} \\ \text{ou} \\ M = PN_2P^{-1} \end{cases}$$

   $M^2 = A$ admet exactement deux solutions distinctes : $M_1 = PN_1P^{-1}$ et $M_2 = PN_2P^{-1}$
   Ces solutions sont connues explicitement grâce au résultat de la partie B.

11. L'espace E ne peut pas être un esp.vectoriel puisque la matrice nulle n'appartient pas à E.

EXERCICE 2

Partie A

1. $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = -\infty$ (Il n'y a pas de forme indéterminée)

   $\varphi(x) = x^{2a}\left(\dfrac{\ln(x)}{x^{2a}} - a\right)$, donc puisque $a > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.

2. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et : $\forall x > 0$, $\quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} = \dfrac{1-2a^2x^{2a}}{x}$.

   On résout : $\varphi'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - 2a^2x^{2a} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}$. Ainsi, en posant :

   $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{1/2a}$: φ est croissante sur $]0, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, +\infty[$.

   Enfin, on pose $M = \varphi(x_0) = -\dfrac{\ln(2a^2)+1}{2a}$, et on obtient le tableau de variations :

x	0		x_0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

3. Si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, alors $2a^2 < e^{-1}$, donc $\ln(2a^2) + 1 < 0$ et $M > 0$.

   φ est continue et strictement croissante sur $]0, x_0]$ (car $\varphi' < 0$ sur $]0, x_0[$), donc φ réalise une bijection de $]0, x_0]$ sur $]-\infty, M]$. Et $M > 0$, donc il existe un unique réel $z_1 \in]0, x_0]$ tel que $\varphi(x) = 0$.

   De même, on montre qu'il existe un unique réel $z_2 > x_0$ tel que $\varphi(x) = 0$.
   Finalement, l'équation : $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

   Si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, alors $M = 0$, et l'équation $\varphi(x) = 0$ admet x_0 comme unique solution.

   Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, alors $M < 0$ et l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a pas de solution.

Partie B

4. f est ici une somme de produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

5. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\quad \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = \dfrac{\ln(y)}{x} - ay^a x^{a-1} \\ \partial_2(f)(x,y) = \dfrac{\ln(x)}{y} - ax^a y^{a-1} \end{cases}$

6. $\forall (x, y) \in U$,

$$\begin{cases} \dfrac{\ln(y)}{x} - ay^ax^{a-1} = 0 \\ \dfrac{\ln(x)}{y} - ax^ay^{a-1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) = a(xy)^a \\ \ln(x) = a(xy)^a \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) = \ln(y) \\ \ln(x) = a(xy)^a \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ \ln(x) = ax^{2a} \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

7. Si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = z_1$ ou $x = z_2$.
Donc f admet excatement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2).
Si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, f admet un unique point critique : (x_0, x_0).
Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$, l'équation : $\varphi(x) = 0$ n'a pas de solution, donc f n'admet aucun point critique.

Partie C

8. $\forall (x,y) \in U,$ $\begin{cases} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -\dfrac{\ln(y)}{x^2} - a(a-1)y^a x^{a-2} \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = \dfrac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\ \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -\dfrac{\ln(x)}{y^2} - a(a-1)x^a y^{a-2} \end{cases}$

9. Au point critique (z_1, z_1) :
   - $\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -\dfrac{\ln z_1}{z_1^2} - a(a-1)z_1^a z_1^{a-2}$
     Et on se rappelle que $\varphi(z_1) = 0$, donc $\ln(z_1) = a z_1^{2a}$, et ainsi :
     $\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -a z_1^{2a-2} - a(a-1)z_1^{2a-2} = -a^2 z_1^{2a-2}$.
   - Le calcul de $\partial^2_{2,2}(f)(z_1, z_1)$ est identique.
   - $\partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) = \partial^2_{2,1}(f)(z_1, z_1) = \dfrac{1}{z_1^2} - a^2(z_1^2)^{a-1} = \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2}$

   On obtient ainsi la matrice hessienne demandée.

10. On observe que $MX_1 = (\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2})X_1$ et $MX_2 = -\dfrac{1}{z_1^2}X_2$, avec $X_1 \neq 0$ et $X_2 \neq 0$, donc $\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}, -\dfrac{1}{z_1^2}$ sont bien des valeurs propres de M, et (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, il ne peut pas y avoir d'autres valeurs propres, donc :
$$Sp(M) = \{\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}, -\frac{1}{z_1^2}\}$$

11.
   - D'une part, la valeur propre :$-\dfrac{1}{z_1^2}$ est strictement négative.
   - D'autre-part, $\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = \dfrac{1 - 2a^2 z_1^{2a}}{z_1^2}$. Or, $z_1 < x_0$, donc $z_1^{2a} < \dfrac{1}{2a^2}$, ce qui prouve que la valeur propre : $\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}$ est strictement positive.

   Ainsi, la matrice Hessienne admet deux valeurs propres non-nulles et de signes opposés, donc f n'admet pas d'extremum local en (z_1, z_1).

12.
   - La valeur propre :$-\dfrac{1}{z_2^2}$ est strictement négative.
   - Et $z_2 > x_0$, donc ici la valeur propre : $\dfrac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2}$ est strictement négative.

   Donc f admet en (z_2, z_2) un extremum local, et cet extremum est un maximum.

EXERCICE 3

Partie A

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on effectue une tirage d'une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Donc X_k suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et $E(X_k) = \dfrac{n+1}{2}$.

2. (a)
   - Au minimum, il faut un tirage pour obtenir une somme supérieure ou égale à n. (C'est le cas où la première boule tirée porte le numéro n).
   - Au maximum, la somme atteind ou dépasse n au $n-ime$ tirage. (C'est le cas où les $n-1$ premières boules tirées portent le numéro 1).

   Ainsi, $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$

   (b) $P(T_n = 1) = P(X_1 = n) = \dfrac{1}{n}$.

   (c) L'événement $(T_n = n)$ est réalisé si et seulement si les $n-1$ premières boules tirées portent le numéro 1. Ainsi :

$$P(T_n = n) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{n-1}(X_k = 1)\Big)$$

   Les tirages s'effectuant avec remise, les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes. Donc :

$$P(T_n = n) = \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

3. $T_2(\Omega) = \{1, 2\}$, et appliquant les résultats des questions précédentes, on obtient directement le tableau suivant :

k	1	2
$P(T_2 = k)$	$1/2$	$1/2$

4. $T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, et appliquant les résultats des questions précédentes, on obtient directement les résultats suivants :
   $P(T_3 = 1) = \dfrac{1}{3}$ et $P(T_3 = 3) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.
   Et enfin, $P(T_3 = 2) = 1 - P(T_3 = 1) - P(T_3 = 3) = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{9}$

   On obtient ainsi le tableau;

k	1	2	3
$P(T_3 = k)$	$1/3$	$5/9$	$1/9$

   $E(T_3) = 1 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{5}{9} + 3 \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{3 + 10 + 3}{9} = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5.
- La plus petite valeur possible que peut prendre S_k correspond au cas où les k premiers tirages donnent la boule numéro 1. Dans ce cas, $S_k = k$.
- La plus grande valeur possible que peut prendre S_k correspond au cas où les k premiers tirages donnent la boule numéro n. Dans ce cas, $S_k = kn$.
- S_k peut prendre toutes les valeurs entières intermédiaires (On peut le démontrer par récurrence sur k, mais cette démonstration ne sera pas exigée des candidats).

Donc $S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]$.

6. (a) $S_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} X_i = S_k + X_{k+1}$

(b) $\{(S_k = j)\}_{j\in[\![k,nk]\!]}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$,

$$P(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{nk} P\big((S_k = j)\cap(S_{k+1} = i)\big) = \sum_{j=k}^{nk} P\big((S_k = j)\cap(X_{k+1} = i-j)\big) = \sum_{j=k}^{nk} P(S_k = j)P(X_{k+1} = i-j)$$

(car les variables aléatoires S_k et X_{k+1} sont indépendantes.) Or, $P(X_{k+1} = i-j) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } j \in [\![k, i-1]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$,

donc :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$$

7. (a) $\forall (k, j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \dbinom{j}{k} = \dbinom{j-1}{k-1} + \dbinom{j-1}{k}$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$, on a en reconnaissant une somme télescopique :

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \left[\binom{j}{k} - \binom{j-1}{k}\right] = \binom{i-1}{k} - \binom{k-1}{k} = \binom{i-1}{k}$$

On a bien montré :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i \geqslant k+1, \quad \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$

(c)
- $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(S_1 = i) = P(X_1 = i) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n}\dbinom{i-1}{0}$,
  donc la propriété $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{H}_k$ soit vraie.

  $$\forall i \in [\![k+1, n]\!], \quad P(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} P(S_k = j)$$

  Et pour tout entier $j \in [\![k, i-1]\!]$, on a aussi $j \in [\![k, n]\!]$, donc :

  $P(S_{k+1} = i) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}}\sum_{j=k}^{i-1}\binom{k-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}}\binom{i-1}{k}$,

  ce qui établit $\mathcal{H}_{k+1}$.
- Conclusion : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall i \in [\![k, n]\!], \quad P(S_k = i) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{i-1}{k-1}$

8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. L'événement $(T_n > k)$ est réalisé si et seulement si il a fallu strictement plus de k tirages pour que la somme des numéros obtenus atteigne ou dépasse n, c'est à dire si et seulement si à l'issue des k premiers tirages, la somme des numéros obtenus est strictement plus petite que n, si et seulement si l'événenement $(S_k \leqslant n-1)$ est réalisé.
Ainsi, $\boxed{(T_n > k) = (S_k \leqslant n-1)}$

(b) $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad P(T_n > k) = P(S_k \leqslant n-1) = \sum_{i=k}^{n-1} P(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}}$$

9.

$$\begin{aligned}
E(T_n) &= \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\big(P(T_n > k-1) - P(T_n > k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(T_n > k) - \sum_{k=1}^{n} kP(T_n > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k) + 0P(T_n > 0) - nP(T_n > n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P(T_n > k)
\end{aligned}$$

Donc en poursuivant le calcul :

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

10. $E(T_n) = \exp\left((n-1)\ln(1 + \frac{1}{n})\right) = \exp\left((n-1)(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right) = \exp(1 + o(1))$.

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} E(T_n) = e$$

Partie C

11. (a) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{N} P(Y=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{N!}$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k) = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{1}{N!} = \boxed{1}$

(b) Y admet une espérance si et seulement $\sum_{k\geqslant 1} kP(Y=k)$ converge absolument. Le terme général de la série étant positif, il suffit d'étudier la convergence simple.

$$\forall N \geqslant 2,\quad \sum_{k=1}^{N} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!}.$$

On reconnaît là la somme partielle d'une série usuelle convergente, donc Y admet une espérance, et on a : $E(Y) = e$.

12. Soit k un entier naturel non nul. Pour tout entier n supérieur à k :

$$P(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n^k}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{1}{k!}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{i}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n > k) = \frac{1}{k!}$$

13. Soit k un entier naturel non nul. Alors : $\forall n \geqslant k,\quad P(T_n = k) = P(T_n > k-1) - P(T_n > k)$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = P(Y=k).$$

La suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge donc en loi vers la variable aléatoire Y.

14.
```
function y=T(n)
    S=0 \\ initialisation de la somme à 0
    y=0 \\ initialisation du nombre de tirages à 0
    while S<n
        tirage=grand(1,1,'uin',1,n)
        S=S+tirage
        y=y+1
    end
```

15. (a)
- la fonction `freqT` effectue 100000 simulation de la variable aléatoire T_n et renvoie un vecteur qui représente les fréquences des résultats observés.
  Plus précisément, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le k-ème coefficient de ce vecteur représente la fréquence des cas où T_n a pris la valeur k. Ce vecteur est représenté graphiquement par le diagramme à bâton.
- La fonction `loitheoY(n)` renvoie un vecteur de taille n, tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le k-ème coefficient donne la valeur de $P(Y=k)$. Les valeurs de ce vecteur sont représntés sur le graphique par les croix.

(b) On observe que plus la valeur de n est grande, plus les fréquences observées se rapprochent des probabilités de la loi de Y. Ceci illustre le fait que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un prérequis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, près des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 10,99 et un écart-type de 5,75, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre proposait ici la recherche de racines carrées à une matrice carrée réelle d'ordre 3. Séparé en trois parties indépendantes, il permettait aux candidats sérieux de montrer leurs connaissances en algèbre grâce aux questions de cours. La plupart des candidats a donc abordé cet exercice.

1. Bien traitée.
2. La question est souvent bien traitée par les candidats.
   Certains candidats s'arrêtent à l'inclusion : $Sp(A) \subset \{1\}$.
3. On relève de nombreuses méthodes différentes pour l'inversibilité, dont beaucoup provoquant une perte de temps, ce qui est dommage car la réponse pouvait tenir en une ligne avec la question précédente.
   La diagonalisabilité a peu souvent été traitée par le raisonnement par l'absurde, certains candidats ne sachant conclure qu'avec la dimension des sous-espaces propres.
4. Le caractère $\mathcal{C}^2$ a été souvent montré de manière correcte.
   Rappelons que, lorsqu'une fonction emploie une racine carrée ou un logarithme, et qu'on attend une dérivabilité ou un caractère $\mathcal{C}^2$, le correcteur attend explicitement l'appel d'une composition en précisant les bons intervalles.
5. Les étudiants ont souvent trouvé le bon coefficient, soit en appliquant Taylor-Young, soit en utilisant le développement limité connu.
6. Certains candidats développent : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
7. Le démarrage est parfois difficile à cause des erreurs sur α. On attendait précisément que les élèves ne confondent pas 1 et I_3 en substituant dans le polynôme x par A.

8. (a) Cette question, qui cherchait à vérifier la bonne compréhension de la représentation matricielle d'un endomorphisme ou de vecteurs, a été bien faite par environ deux tiers des candidats. Certains candidats confondent l'écriture en lignes/colonnes, entre vecteurs/colonnes et environ un quart des candidats a utilisé T au lieu de M. Le bilan est donc assez négatif sur cette question.
   (b) Une proportion élevée de candidats faibles se perd autour de la notion de famille génératrice. Les candidats moyens et bons s'en sortent bien.
   (c) Les candidats ayant compris l'exercice ont parfois bluffé pour obtenir la première colonne, même avec des calculs faux dans la question 8(a).
   (d) La question a été bien traitée par une large majorité de candidats. On attendait simplement l'allusion à une formule de changement de base.
9. (a) Les candidats ayant traité la question le font plutôt bien.
   (b) Certains candidats sont maladroits dans leur résolution de système, et ont des difficulté à formuler une conclusion propre et concise.
10. Beaucoup voient l'idée attendue et trouvent les solutions, mais le raisonnement est souvent incorrect ou incomplet (ils n'arrivent pas à obtenir convenablement que ce sont les seules solutions)
11. Une proportion raisonnable de candidats traite convenablement la question.

Exercice 2

Cet exercice d'analyse avait pour but d'étudier les extrema d'une fonction de deux variables. La partie A, qui étudiait une fonction simple d'une variable, a été maltraitée par de nombreux candidats, révélant de nombreuses lacunes en analyse.

1. Très peu pensent à préciser que $a > 0$. Le reste est bien fait.
2. La dérivation de la fonction φ a été l'objet de fantaisies les plus diverses, laissant penser que l'étude des variations d'une fonction n'est pas maîtrisée par de nombreux candidats.
   Beaucoup de candidats étudient l'équation $\varphi'(x) = 0$ pour étudier les variations, le signe étant alors « deviné ».
3. Beaucoup de candidats perdent un temps considérable à étudier $a < \sqrt{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \varphi(x_0) > 0$, s'empalent dans leurs calculs, finissent par mal rédiger l'application du théorème de la bijection.
4. Les candidats se perdent souvent dans des détails inutiles (qu'ils traitent mal, mélangeant les fonctions à une et deux variables)
5. La dérivée de $(xy)^a$ est souvent maltraitée, ce qui se répercute dans les questions suivantes.
6. Les candidats ayant obtenu correctement les dérivées partielles premières obtiennent assez naturellement le résultat proposé.
   Certains candidats ayant des dérivées partielles fausses truandent leurs calculs pour parvenir tant bien que mal au résultat demandé. Ces tentatives vaines sont souvent grossières, repérées facilement par les correcteurs, et donne un a priori négatif sur les futures questions du candidat pour lequel l'honnêteté est remise en doute.
7. Certains candidats, même très bons, ne voient pas le lien entre la question 3 et la question 7. Mais parmi ceux n'ayant pas abordé la question 3, beaucoup ont pu démontrer la première partie de la question, ce qui montre une bonne lecture de l'exercice.
8. De même qu'à la question 5, les calculs étaient élémentaires mais les erreurs pouvaient se répercuter dans les questions suivantes.
9. Il est toujours du plus mauvais effet de voir des candidats tenter d'escroquer le correcteur, et parvenir à simplifier magiquement un résultat faux en le résultat qu'il est demandé de démontrer.

10. De très rares copies mentionnent que X_1 et X_2 sont non nuls pour affirmer que ce sont des vecteurs propres, ces copies ont alors été récompensées. Un nombre conséquent de candidats ne simplifient pas $-a^2z_1^{2a-2} - a^2z_1^{2a-2}$ ni même $-a^2z_1^{2a-2} + a^2z_1^{2a-2}$.

11. Peu de candidats ont le recul nécessaire pour l'étude de signe. Les candidats ayant au moins énoncé le théorème du cours et la conclusion en fonction du signe des valeurs propres (sans l'avoir forcément déterminé explicitement) ont été valorisés.

Exercice 3

L'exercice 3 avait pour objet d'étude une suite de variables aléatoires discrètes, pour en étudier la convergence en loi, donnant l'occasion de vérifier la bonne maîtrise du logiciel Scilab.

Partie A

1. Une moitié seulement des candidats a reconnu la loi uniforme, mais l'espérance était alors mal connue.
2. (a) Bien traité par de nombreux candidats, mais pas forcément argumenté.
   (b) Bien traité par de nombreux candidats.
   (c) Comme souvent, certains candidats bluffent, et proposent un raisonnement hasardeux qui tomber par magie sur le bon résultat. Ces candidats sont alors systématiquement sanctionnés.
3. Peu de candidats ont vu qu'ils pouvaient utiliser les résultats démontrés dans la question 2.
4. Comme à la question précédente, peu sont ceux ayant compris comment utiliser la question 2 pour obtenir sans calcul les résultats. En revanche, beaucoup de raisonnements ont été correctement menés pour (re)-trouver les valeurs de $P(T_3 = 2)$ et $P(T_3 = 3)$, malgré la perte de temps que cela occasionnait.

Partie B

5. Peu ont obtenu le bon résultat. On attendait une discussion brève sur les valeurs extrêmes possibles de $S_k(\Omega)$.
6. (a) La question, qui était ici surtout pour guider les questions suivantes, a été bien traitée
   (b) Seules les bonnes copies abordent la question, et répondent bien dans l'ensemble.
7. (a) Beaucoup tentent de prendre les points de cette question de cours, mais certains remplacent la somme par un produit.
   (b) Quelques récurrences sont rencontrées, quelques sommes télescopiques repérées. Les candidats ont souvent sauté la question.
   (c) Cette question a souvent été traitée, même lorsque les questions précédentes avaient été sautées. La plupart des récurrences étaient correctes et bien rédigées.
8. (a) L'égalité est souvent devinée par les bonnes copies, mais seule une implication n'est justifiée en général.
   (b) Peu abordé.
9. La question est rarement abordée.
10. Beaucoup essaient d'obtenir les points à cette question. Parmi ceux qui essaient sérieusement, beaucoup sentent ou savent qu'il faut faire attention avec les équivalents, mais nombreux finissent quand même à passer à l'équivalent dans l'exponentielle pour conclure.

Partie C

11. Ceux qui ont eu le temps d'aborder cette question s'en sortent souvent bien. On remarque cependant que beaucoup de calculs ont lieu directement sur les sommes infinies comme s'il s'agissait de sommes finies.
12. Rarement abordée.
13. Rarement abordée.
14. La plupart des candidats essaie, mais beaucoup semblent écrire des instructions totalement au hasard. Peu de candidats parviennent finalement à écrire les trois lignes correctes.
15. Trop peu de candidats répondent sérieusement, ce qui est dommage, vu la simplicité de ces deux questions.