ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2018

prépa

1

Mathématiques

Option Scientifique

Lundi 16 avril 2018 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 6 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique.
Pour toutes matrices colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$.
Pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $\|X\| = \sqrt{{}^tXX}$.

On considère u et v deux endomorphismes de E, et on note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E.

Partie 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose **dans cette partie uniquement** que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.
2. (a) Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.
   (b) Vérifier que le vecteur $x_0 = (1, a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.
   (c) Déterminer le spectre de $u \circ v$.
3. (a) Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, $u \circ v$ est-il un projecteur ?

Partie 2

On revient dans cette partie au cas général, où n désigne un entier tel que $n \geqslant 2$.
On suppose que u et v sont des projecteurs symétriques de E et on pose : $C = BAB$.

4. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$\|BX\|^2 = \langle BX, X\rangle.$$
En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$\|BX\| \leqslant \|X\|.$$
5. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Soit λ une valeur propre de C et X un vecteur propre associé.
   (a) Exprimer $\|ABX\|^2$ en fonction de λ et $\|X\|$.
   (b) En déduire que les valeurs propres de C sont réelles positives.
7. Soit μ une (éventuelle) valeur propre de AB non nulle, et X un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que BX est un vecteur propre de C. En déduire que μ est strictement positive.
   (b) Montrer que : $ABX = \mu AX$. En déduire que : $AX = X$.
   (c) Montrer que : $\langle X, BX\rangle = \mu\|X\|^2$.
8. Déduire des questions précédentes que le spectre de AB est inclus dans $[0, 1]$.

EXERCICE 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 - 6y.$$

On pose enfin : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\varphi > 1$ et que les réels φ et $\dfrac{-1}{\varphi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

2.(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Montrer que les seuls points critiques de f sont $(\varphi, \varphi+1)$ et $\left(-\dfrac{1}{\varphi}, \dfrac{1}{\varphi+1}\right)$.
(c) Étudier la nature des points critiques de f.

3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.

4.(a) Recopier et compléter la fonction Scilab suivante afin que, prenant en argument un entier $n \geqslant 2$, elle calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

```
function u=suite(n)
  v=0
  w=1
  for k=2:n
     ................
     ................
     ................
  end
  u=................
endfunction
```

(b) Justifier qu'il existe des réels λ et μ, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.$$

(c) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

5. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.
(a) Montrer, sans chercher à calculer de somme, que la série de terme général $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}}$ converge.
(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
(c) En utilisant le résultat de la question 3, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}.$$

(d) Montrer que : $\varphi = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

ECRiCOME

PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Partie 1 - Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une **relation de Panjer** s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\boxed{P(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(N=k-1).}$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(N=k) = \frac{b^k}{k!} P(N=0).$$
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
   Préciser son espérance et sa variance.

2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \geqslant 2,\ P(N=k) = 0.$$
   (b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.

3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times P(Z=k-1).$$
   (b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes en fonction de n et p.

4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.
   (a) Calculer $P(N=1)$. En déduire que $a + b \geqslant 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) P(N=k) + b \sum_{k=0}^{m-1} P(N=k).$$

(c) En déduire que $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} kP(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.

Préciser alors la valeur de $E(N)$ en fonction de a et b.

(d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :

$$E(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

(e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $V(N)$ en fonction de a et b.

(f) Montrer que $E(N) = V(N)$ si et seulement si N suit une loi de Poisson.

Partie 2 - Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = P(N=k),$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, la série $\sum_{k\geqslant 0} p_k x^k$ est convergente.

On appelle alors **fonction génératrice de** N la fonction G définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k)x^k.$$

et on suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\frac{b}{a} > 0$. On pose : $\alpha = \frac{-(a+b)}{a}$.

On note enfin f la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}.$$

6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in [0,1], \quad f^{(k)}(x) = k! \times p_k(1-ax)^{\alpha-k}.$$

7. Soit $x \in [0,1]$.

(a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

(b) Vérifier que pour tout $t \in [0,x]$, $\frac{x-t}{1-at} \leqslant 1$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que :

$$G(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}.$$

En calculant $G(1)$, exprimer p_0 en fonction de a, b et α, et vérifier que $G'(1) = E(N)$.

Tournez la page s.v.p.

Partie 3 : formule de récursivité

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, mutuellement indépendantes et indépendantes de la variable N étudiée dans la question 4 de la partie 1.

On considère alors la variable aléatoire S définie par :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } N = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k & \text{si } N \geqslant 1 \end{cases}$$

autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad S(\omega) = 0 \text{ si } N(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \text{ sinon.}$$

9. Calculer $P(S = 0)$ lorsque $a \in]0,1[$ à l'aide de la partie 2.

10. (a) Calculer $P(S = 0)$ lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

    (b) On considère la fonction Scilab suivante, où n est un paramètre dont dépend la loi commune des X_k :

```
function y=simulX(n)
  y=0;
  for i=1:n
    if rand()<1/2
      y=y+1;
    end
  end
endfunction
```

    Quelle loi de probabilité est simulée par la fonction `simulX` ? Préciser ses paramètres.

    (c) On rappelle qu'en Scilab l'instruction `grand(1,1,"poi", lambda)` renvoie une réalisation d'une loi de Poisson de paramètre `lambda`.
    On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que la loi des variables X_k est celle simulée à la question précédente par la fonction `simulX`.
    Recopier et compléter la fonction Scilab suivante, afin qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire S :

```
function s=simulS(lambda,n)
  N = grand(1,1,"poi", lambda)
  .......................
  .......................
  .......................
  .......................
  .......................
endfunction
```

11. Dans la suite du problème, on revient au cas général où N vérifie la relation de Panjer. On note toujours :
$$\forall k \geqslant 0, p_k = P(N = k)$$
et on notera également :
$$\forall k \geqslant 0, q_k = P(X_1 = k).$$
Enfin, on considère pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, en convenant qu'on a $S_0 = 0$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\forall i \in [\![1, n+1]\!], \quad E(X_i | S_{n+1} = k) = \frac{k}{n+1}.$$
Indication : on pourra considérer la somme $\sum_{i=1}^{n+1} E(X_i | S_{n+1} = k)$.

(b) Justifier que :
$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1} = j) P(S_{n+1} = k) = q_j P(S_n = k - j).$$

(c) Déduire des deux questions précédentes que :
$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S_n = k - j) = \left(a + \frac{b}{n+1}\right) P(S_{n+1} = k).$$

12. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que :
$$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n P(S_n = k - j).$$

(b) Montrer que :
$$\sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

(c) Justifier que:
$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+1} P(S_{n+1} = k).$$

(d) En déduire finalement que :
$$P(S = k) = \frac{1}{1 - aq_0} \sum_{j=1}^{k} \left(a + \frac{bj}{k}\right) q_j P(S = k - j).$$

2018

CORRIGÉ

MATHEMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE SCIENTIFIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Deux exercices d'application des connaissances de base
- Un problème faisant largement appel aux probabilités.

ÉVALUATION

- Les deux exercices sont de valeur sensiblement égale dans le barème.
- 12 à 14 points sont destinés au problème.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie 1

1. • $A^2 = \dfrac{1}{(1+a^2)^2}\begin{pmatrix} 1+a^2 & a+a^3 \\ a+a^3 & a^2+a^4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{(1+a^2)^2}\begin{pmatrix} 1+a^2 & a(1+a^2) \\ a(1+a^2) & a^2(1+a^2) \end{pmatrix} = A.$

   Comme A est la matrice de l'endomorphisme u dans la base canonique, $u^2 = u$. $\boxed{\text{Ainsi } u \text{ est un projecteur.}}$

   • $B^2 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = B$. Comme B est la matrice de l'endomorphisme v dans la base canonique, $v^2 = v$.

   $\boxed{\text{Donc } v \text{ est un projecteur.}}$

2. (a) • Remarquons que $\begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$. Donc les colonnes de A sont colinéaires.

   Or $A \neq 0$. $\boxed{\text{Donc } A \text{ et aussi } u \text{ est de rang 1.}}$

   • les colonnes de la matrice B sont égales et non nulles. $\boxed{\text{Donc } rg(v) = 1.}$

   • $A \times B = \dfrac{1+a}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix}.$

   Les colonnes de $A \times B$ sont égales. Et si $a \neq -1$, $A \times B$ n'est pas la matrice nulle. Donc $rg(u \circ v) = 1$.

   Si $a = -1$, $A \times B = 0$. Donc $rg(u \circ v) = 1$.

   $\boxed{\text{Ainsi } rg(u \circ v) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq -1 \\ 0 & \text{si } a = -1 \end{cases}.}$

   Remarque : l'énoncé comportait ici une imprécision sur les valeurs de a (la question était fausse si a = −1). En cas d'erreur d'énoncé de la sorte, le barème de correction en tient toujours compte et les candidats qui ne remarquent pas l'erreur ne sont pas sanctionnés. Les candidats qui repèrent l'erreur peuvent parfois selon les cas obtenir un bonus de points.

   (b) Le vecteur x_0 est non nul.

   Et $AB\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$. Donc $u \circ v(x_0) = \dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}x_0$. $\boxed{\text{Donc } x_0 \text{ est un vecteur propre de } u \circ v.}$

   (c) • Si $a = -1$ alors $u \circ v$ est nul et 0 est la seule valeur propre.

   • Supposons $a \neq -1$. Comme $u \circ v$ est de rang 1, 0 est valeur propre.

   D'après la question précédente $\dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}$ est également valeur propre, cette valeur propre est non nulle. Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, il n'y en a pas d'autres.

   $\boxed{\text{Ainsi } Sp(u \circ v) = \begin{cases} \left\{0, \dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}\right\} & \text{si } a \neq -1 \\ \{0\} & \text{si } a = -1 \end{cases}.}$

3. (a) • D'après la question précédente, $Sp(u \circ v) = \left\{0, \dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}\right\}$.

• Or $\dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \geqslant 0$.

• $1 - \dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = \dfrac{(1-a)^2}{2(1+a^2)} \geqslant 0$,

$\boxed{\text{Donc } Sp(u \circ v) \subset [0,1].}$

(b) • Si $a = -1$ alors $u \circ v$ est nul donc $u \circ v$ est un projecteur.

• Supposons $a \neq -1$.

⋆ Si $u \circ v$ est un projecteur alors ses valeurs propres sont 0 ou 1.
Or $\dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \neq 0$.
Et $\dfrac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = 1$ si et seulement si $(1+a)^2 = 2(1+a^2)$ si et seulement si $1 + a^2 - 2a = 0$ si et seulement si $a = 1$.

⋆ Réciproquement si $a = 1$ alors $A = B$. donc $AB = B^2 = B$. Donc AB est un projecteur.

$\boxed{\text{Ainsi } u \circ v \text{ est un projecteur si et seulement } a \in \{-1, 1\}.}$

Partie 2

4. • Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\|BX\|^2 = \langle BX, BX\rangle = {}^t(BX)BX = {}^tX{}^tBBX$$

Or B est symétrique. Donc ${}^tX{}^tBBX = {}^tXBBX = {}^tXB^2X$.
Et $B^2 = B$. Donc $\|BX\|^2 = {}^tXBX$.

$\boxed{\text{Ainsi } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|BX\|^2 = \langle X, BX\rangle = \langle BX, X\rangle.}$

• Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|BX\|^2 = \langle BX, X\rangle \leqslant \|BX\|\,\|X\|.$$

⋆ Si $\|BX\| \neq 0$ alors $\|BX\| > 0$, et en divisant par $\|BX\|$, on a :

$$\|BX\| \leqslant \|X\|.$$

⋆ Si $\|BX\| = 0$, alors l'inégalité reste vraie.

$\boxed{\text{Ainsi } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|BX\| \leqslant \|X\|.}$

5. Remarquons que ${}^tC = {}^t(BAB) = {}^tB{}^tA{}^tB$.
Or les matrices A et B sont symétriques. Donc ${}^tC = BAB = C$.
Ainsi la matrice C est symétrique.
Or A est une matrice à coefficients réels $\boxed{\text{donc } A \text{ est diagonalisable.}}$

6. (a) Remarquons que

$$\begin{aligned}
\|ABX\|^2 &= \langle ABX, ABX\rangle \\
&= {}^t(ABX)ABX \\
&= {}^tX^tB^tAABX \\
&= {}^tXBAABX \qquad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont symétriques} \\
&= {}^tXBABX \qquad \text{car } A^2 = A \\
&= \langle X, CX\rangle
\end{aligned}$$

Or X est un vecteur propre de C associé à la valeur propre λ, donc $CX = \lambda X$.
$\boxed{\text{Ainsi } \|ABX\|^2 = \lambda\|X\|^2.}$

(b) Comme X n'est pas nul, on a $\lambda = \dfrac{\|ABX\|^2}{\|X\|^2} \in \mathbb{R}^+$. $\boxed{\text{Donc les valeurs propres de } C \text{ sont réelles positives.}}$

7. (a) •

$$\begin{aligned}
CBX &= BABBX \\
&= BABX \quad \text{car } B^2 = B \\
&= B(ABX) \\
&= B(\mu X) \quad \text{car } X \text{est un vecteur propre de } AB \text{ associé à } \mu \\
&= \mu BX.
\end{aligned}$$

Or $ABX = \mu X \neq 0$ car X et μ sont non nuls. Donc $BX \neq 0$.
$\boxed{\text{Donc } BX \text{ est un vecteur propre de } C.}$

• Et μ est une valeur propre de C. Et d'après la question précédente, $\mu \geqslant 0$.
Par hypothèse μ est non nul. $\boxed{\text{Donc } \mu > 0.}$

(b) •

$$\begin{aligned}
ABX &= A^2BX \quad \text{car } A^2 = B \\
&= A(ABX) \\
&= A(\mu X) \quad \text{car } X \text{est un vecteur propre de } AB \text{ associé à } \mu \\
&= \mu AX
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } ABX = \mu AX.}$

• Mais $ABX = \mu X$ donc $\mu AX = \mu X$ et en divisant par $\mu \neq 0$, $\boxed{AX = X.}$

(c)

$$\begin{aligned}
\langle X, BX\rangle &= \langle AX, BX\rangle \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= {}^t(AX)BX \quad \text{par définition du produit scalaire} \\
&= {}^tX^tABX \\
&= {}^tXABX \\
&= {}^tX(\mu X) \quad \text{car } X \text{est un vecteur propre de } AB \text{ associé à } \mu \\
&= \mu\|X\|^2.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc : } \langle X, BX\rangle = \mu\|X\|^2.}$

8. Soit μ une valeur propre de AB et X un vecteur propre associé.
   - Soit $\mu = 0$ alors $\mu \in [0, 1]$.
   - Soit $\mu \neq 0$.
     - $\star$ Alors d'après la question 7a, $\mu > 0$.
     - $\star$ Et d'après la question 4, $\|BX\|^2 = \langle BX, X\rangle$ et $\|BX\|^2 \leqslant \|X\|^2$.
       Donc $\langle BX, X\rangle \leqslant \|X\|^2$ Or d'après la question 7c, $\langle X, BX\rangle = \mu\|X\|^2$.
       Donc $\mu\|X\|^2 \leqslant \|X\|^2$.
       Comme X est un vecteur propre de AB, X est non nul.
       Alors $\|X\|^2 > 0$. Donc en divisant par $\|X\|^2$, $\mu \leqslant 1$.

     Ainsi $0 < \mu \leqslant 1$

   $\boxed{\text{Finalment } Sp(AB) \subset [0, 1].}$

EXERCICE 2

1. - $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Or $5 > 1$, alors $\sqrt{5} > 1$. $\boxed{\text{Donc } \varphi > 1.}$
   - Le discriminant de $X^2 - X - 1$ est $\Delta = 1 - (-4) = 5$.
     Les racines sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et:

$$\frac{-1}{\varphi} = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{-2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi'.$$

   $\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ et } \frac{-1}{\varphi} \text{ sont les solutions de } x^2 - x - 1 = 0.}$

2. (a) La fonction f est polynomiale. $\boxed{\text{Donc } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$

   (b) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, les points critiques de f sont les solutions de l'équation $\nabla(f)(x, y) = (0, 0)$.
   Or $\partial_1(f)(x, y) = 6x^2 - 6y$ et $\partial_2(f)(x, y) = -6x + 6y - 6$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \nabla(f)(x,y) = (0,0) &\iff \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \varphi \text{ ou } x = \dfrac{-1}{\varphi} \\ y = x + 1 \end{cases} \\
&\iff (x, y) = (\varphi, 1 + \varphi) \text{ ou } (x, y) = \left(\frac{-1}{\varphi}, \frac{-1}{\varphi} + 1\right).
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{-1}{\varphi}+1=\left(\dfrac{-1}{\varphi}\right)^2$ car $\dfrac{-1}{\varphi}$ est solution de $x^2-x-1=0$.

Et $\varphi^2=\varphi+1$. Donc $\dfrac{-1}{\varphi}+1=\dfrac{1}{\varphi+1}$.

$\boxed{\text{Ainsi les seules points critiques de } f \text{ sont } (\varphi,\varphi+1) \text{ et } \left(\dfrac{-1}{\varphi},\dfrac{1}{\varphi+1}\right).}$

(c) •

$$\nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix}12x & -6\\ -6 & 6\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}2x & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

- Supposons que (x,y) est un point critique.

  On étudie le spectre de $\begin{pmatrix}2x & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

  $\lambda\in Sp(\begin{pmatrix}2x & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}) \iff (2x-\lambda)(1-\lambda)-1=0 \iff \lambda^2-(2x+1)\lambda+2x-1=0.$

  Le discriminant est $\Delta=(2x+1)^2-4(2x-1)=4x^2-4x+5$.

  Comme (x,y) est un point critique $x^2-x=1$ et ainsi $\Delta=9$.

  Les racines sont donc $\lambda_1=\dfrac{2x+1+3}{2}=x+2$ et $\lambda_2=\dfrac{2x+1-3}{2}=x-1$.

  Donc le spectre de $\nabla^2 f(x,y)$ est $\{x+2,x-1\}$ dans le cas où (x,y) est un point critique.

- Si $(x,y)=(\varphi,\varphi+1)$, alors $\varphi+2$ et $\varphi-1$ sont strictement positifs.

  $\boxed{\text{Donc } f \text{ a un minimum local en } (\varphi,\varphi+1).}$

- Si $(x,y)=\left(-\dfrac{1}{\varphi},\dfrac{1}{\varphi+1}\right)$, alors $-\dfrac{1}{\varphi}+2=\dfrac{-1+2\varphi}{\varphi}>0$ et $-\dfrac{1}{\varphi}-1<0$ donc f n'a pas d'extremum en $\left(-\dfrac{1}{\varphi},\dfrac{1}{\varphi+1}\right)$.

  $\boxed{\text{Ainsi } \left(-\dfrac{1}{\varphi},\dfrac{1}{\varphi+1}\right) \text{ est un point col.}}$

3. Montrons par récurrence que $u_nu_{n+2}-u_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

- Or $u_0=0, u_1=u_2=1$ donc $u_0u_2-u_1^2=-1=(-1)^{0+1}$.
- Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_nu_{n+2}-u_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}u_{n+3}-u_{n+2}^2 &= u_{n+1}(u_{n+1}+u_{n+2})-u_{n+2}^2\\
&= u_{n+1}^2+u_{n+2}\underbrace{(u_{n+1}-u_{n+2})}_{=-u_n}\\
&= u_{n+1}^2-u_{n+2}u_n\\
&= -(u_nu_{n+2}-u_{n+1}^2)\\
&\underset{\substack{\text{par hypothèse}\\ \text{de récurrence}}}{=} (-1)^{n+2}
\end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Ainsi pour tout entier } n,\ u_nu_{n+2}-u_{n+1}^2=(-1)^{n+1}.}$

CONCOURS ECRICOME PREPA

4. (a)

```
function u=suite(n)
v=0
w=1
for k=2:n
    x = v+w
    v = w
    w = x
end
u= w
endfunction
```

(b) • La suite (u_n) vérifie une relation de récurrence double dont l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ admet pour solutions φ et $\frac{-1}{\varphi}$.

$\boxed{\text{Donc il existe deux réels } \lambda \text{ et } \mu \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda\varphi^n + \mu\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n.}$

• Ces coefficients vérifient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \quad \text{pour } n = 0 \\ \lambda\varphi + \mu\left(\dfrac{-1}{\varphi}\right) & = 1 \quad \text{pour } n = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda\left(\varphi + \left(\dfrac{1}{\varphi}\right)\right) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\dfrac{\varphi}{\varphi^2+1} \\ \lambda = \dfrac{\varphi}{\varphi^2+1} \end{cases}$$

• $\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\varphi}{\varphi^2+1}\left(\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n\right).}$

(c) Or $\varphi > 1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{(-1)}{\varphi}\right)^n}{\varphi^n} = 0$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\varphi^n$.

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda\varphi^{n+1}}{\lambda\varphi^n}$. $\boxed{\text{Ainsi } \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi.}$

5. (a) • Rappelons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\varphi^n$.

Ainsi on a $\frac{1}{u_n u_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\lambda^2\varphi}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n$.

• Or $0 < \frac{1}{\varphi^2} < 1$. Donc la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)^n$ converge.

Et par comparaison des séries à terme général positif, $\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{u_n u_{n+1}} \text{ converge.}}$

(b) La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$ est convergente car absolument convergente.

$\boxed{\text{Donc la suite } (S_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1} u_{n+2}} \\ &= \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+1} u_{n+2}} \\ &= \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}. \end{aligned}$$

(d) • Soit $N \geqslant 2$.

$$S_{N+1} - S_1 = \sum_{n=1}^{N} (S_{n+1} - S_n) = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \right) = \frac{u_1}{u_2} - \frac{u_{N+1}}{u_{N+2}}$$

- Or $u_1 = u_2 = 1$ donc $S_1 = -1$ et ainsi pour tout $N \geqslant 2$, $\dfrac{u_{N+1}}{u_{N+2}} = -S_{N+1}$.
- La question 4.c) a montré que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \varphi$. Donc $\dfrac{u_{N+1}}{u_{N+2}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\varphi}$.
- En faisant tendre N vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\varphi} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}$.

  Or $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ car $\varphi^2 = \varphi + 1$.

  $\boxed{\text{Donc } \varphi = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{u_k u_{k+1}}}$

PROBLEME

Partie 1: Variables vérifiant une relation de Panjer

1. (a) Procédons par récurrence pour montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ P(N = k) = \dfrac{b^k}{k!} P(N = 0)$.

- $P(N = 0) = \dfrac{b^0}{0!} P(N = 0)$.
- Supposons qu'il existe un entier k non nul tel que $P(N = k - 1) = \dfrac{b^{k-1}}{(k-1)!} P(N = 0)$.

$$P(N = k) = \frac{b}{k} P(N = k - 1) = \frac{b}{k} \times \frac{b^{k-1}}{(k-1)!} P(N = 0) = \frac{b^k}{k!} P(N = 0)$$

- $\boxed{\text{Ainsi } \forall k \in \mathbb{N},\ P(N = k) = \frac{b^k}{k!} P(N = 0).}$

(b) Remarquons que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{b^k}{k!}P(N=0)\right)=P(N=0)e^b$$

Or la famille $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)=1$.

Alors $P(N=0)=e^{-b}$.

$$\text{Ainsi } \forall k\in\mathbb{N}\quad P(N=k)=e^{-b}\frac{b^k}{k!}$$

$\boxed{\text{La variable aléatoire } N \text{ suit donc une loi de Poisson de paramètre } b.\text{ Donc } E(N)=b \text{ et } V(N)=b.}$

2. (a) Montrons par une récurrence que pour tout $k\geqslant 2$, $P(N=k)=0$.

- $P(N=2)=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)P(N=1)=(a-a)P(N=1)=0$.
- Soit $k\geqslant 3$. Si $P(N=k-1)=0$ alors:

$$P(N=k)=\left(a-\frac{2a}{k}\right)P(N=k-1)=0$$

- $\boxed{\text{Pour tout } k\geqslant 2,\ P(N=k)=0.}$

(b) ◇ D'après la question précédente que $N(\Omega)=\{0,1\}$. Par conséquent, N suit une loi de Bernoulli.

◇ De plus, $P(N=1)+P(N=0)=1$.

D'où, $-aP(N=0)+P(N=0)=1$ et comme $a<1$, $P(N=0)=\dfrac{1}{1-a}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } N \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } -\dfrac{a}{1-a}.}$

3. (a) Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $P(Z=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n+1-k}{k}\dbinom{n}{k-1}$.

$$\begin{aligned}\text{D'où } P(Z=k) &= \frac{n+1-k}{k}\times\frac{p}{1-p}\times\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n+1-k}\\ &= \frac{p}{1-p}\times\frac{n-k+1}{k}\times P(Z=k-1)\end{aligned}$$

(b) • $P(Z=0)\neq 1$.

• De plus, en posant $a=-\dfrac{p}{1-p}$ et $b=\dfrac{p(n+1)}{1-p}$.

Alors $a<1$ car $-p<1-p$ et $1-p>0$ et

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\quad P(N=k)=\left(a+\frac{b}{k}\right)P(N=k-1)$$

- Comme $a+\dfrac{b}{n+1}=0$ et $P(N=n+1)=0$, cette relation reste vraie pour $k=n+1$.
  Et par une récurrence immédiate

$$\forall k\geqslant n+1,\ P(N=k)=\left(a+\frac{b}{k}\right)P(N=k-1)=0$$

$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z \text{ vérifie donc une relation de Panjer.}}$

4. (a) • $P(N=1)=(a+b)P(N=0)$.
   - Si $P(N=0)=0$ alors par une récurrence immédiate, on montre que pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, on a $P(N=k)=0$, ce qui est exclu. On en déduit que $P(N=0)>0$.
   - Or $P(N=1)\geqslant 0$. $\boxed{\text{D'où } a+b\geqslant 0.}$

   (b) Soit $m\geqslant 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} kP(N=k) &= a\sum_{k=1}^{m} kP(N=k-1)+b\sum_{k=1}^{m} P(N=k-1)\\ &= a\sum_{j=0}^{m-1}(j+1)P(N=j)+b\sum_{j=0}^{m-1}P(N=j)\end{aligned}$$

   (c) • D'après la question précédente:

$$(1-a)\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k)+mP(N=m)=(a+b)\sum_{k=0}^{m-1}P(N=k).$$

Comme $a+b\geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}P(N=k)\leqslant 1$, alors $\displaystyle(a+b)\sum_{k=0}^{m-1}P(N=k)\leqslant a+b$.
Et $mP(N=m)\geqslant 0$,
donc $\displaystyle(1-a)\sum_{k=0}^{m-1}kP(N=k)+mP(N=m)\geqslant(1-a)\sum_{k=0}^{m-1}kP(N=k)$.
Ainsi $\displaystyle(1-a)\sum_{k=0}^{m-1}kP(N=k)\leqslant a+b$.
Or $1-a>0$.

$$\sum_{k=0}^{m-1}kP(N=k)\leqslant\frac{a+b}{1-a}$$

- La suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{m-1}kP(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est croissante et majorée, donc elle converge.
  $\boxed{\text{Donc } N \text{ admet une espérance.}}$
- Par conséquent, $mP(N=m)\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et d'après la question précédente, $\boxed{E(N)=\dfrac{a+b}{1-a}}$.

(d) • Pour tout $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m} k^2 P(N=k) \\
&= a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)^2 P(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)P(N=k) \\
&= a\sum_{k=0}^{m-1} k^2 P(N=k) + (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k)
\end{aligned}$$

Ainsi:

$$(1-a)\sum_{k=0}^{m-1} k^2 P(N=k) + m^2 P(N=m) = (2a+b)\sum_{k=0}^{m-1} kP(N=k) + (a+b)\sum_{k=0}^{m-1} P(N=k)$$

• Or $2P(N=2) = (2a+b)P(N=1)$.
Si $P(N=1)=0$ alors pour tout $k \geqslant 1$, $P(N=k)=0$ d'où $P(N=0)=1$, ce qui est exclu.
Donc $P(N=1)>0$ et $2a+b = \dfrac{2P(N=2)}{P(N=1)} \geqslant 0$.
D'où:

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 P(N=k) \leqslant \frac{2a+b}{1-a}E(N) + \frac{a+b}{1-a}.$$

• La série de terme général $k^2P(N=k)$ est donc convergente et N admet un moment d'ordre 2.
De plus, $m^2 P(N=m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$E(N^2) = \frac{2a+b}{1-a}E(N) + \frac{a+b}{1-a} = \frac{(a+b)}{(1-a)^2}(2a+b+1-a)$$

$$\boxed{\text{Ainsi } E(N^2) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.}$$

(e) D'après la formule de Koenig Huygens, $V(N) = E(N^2) - (E(N))^2$.
Donc $V(N) = \dfrac{(a+b)(a+b+1-a-b)}{(1-a)^2} = \dfrac{a+b}{(1-a)^2}$.

(f) • Si N suit une loi de Poisson alors $E(N) = V(N)$.

• Réciproquement, supposons $E(N) = V(N)$. D'après les questions 4.c et 4.d,

$$\frac{(a+b)}{(1-a)^2}(1-(1-a)) = 0 \Longleftrightarrow a=0 \text{ ou } a+b=0$$

Or $a+b \neq 0$ car $P(N=1)\neq 0$.
D'où $a=0$ et d'après la question 1.b, N suit une loi de Poisson de paramètre b.

$$\boxed{\text{Ainsi } E(N) = V(N) \text{ si et seulement si } N \text{ suit une loi de Poisson.}}$$

Partie 2: Fonction génératrice

5. Soit $x \in [0,1]$.
   - Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_k x^k \leqslant p_k$.
   - La série de terme général p_k est convergente de somme 1 donc par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série de terme général } p_k x^k \text{ converge.}}$
6. On montre la formule par récurrence.
   - Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f^{(0)}(x) = p_0(1-ax)^{\alpha}$.
   - Supposons qu'il existe un entier k tel que $\forall x \in [0,1] \quad f^{(k)}(x) = (k)!p_k(1-ax)^{\alpha-k}$.
     En dérivant $f^{(k)}$, on a :
     $$f^{(k+1)}(x) = -a(\alpha-k)k!p_k(1-ax)^{\alpha-(k+1)}$$
     Or, sachant que $a+b = -\alpha a$:
     $$\begin{aligned}(k+1)!p_{k+1} &= (k+1)k!\left(a+\frac{b}{k+1}\right)p_k \\ &= k!p_k((k+1)a+b) \\ &= -a(\alpha-k)k!p_k\end{aligned}$$
     Donc $\forall x \in [0,1] \quad f^{(k+1)}(x) = (k+1)!p_{k+1}(1-ax)^{\alpha-(k+1)}$.
   - $\boxed{\text{Ainsi par le principe de récurrence, } \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] \quad f^{(k)}(x) = k!p_k(1-ax)^{\alpha-k}.}$
7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$ donc par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliqué entre 0 et x, on a
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$
   D'où, avec les résultats de la question précédente:
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + (n+1)p_{n+1}\int_0^x (x-t)^n(1-at)^{\alpha-(n+1)}\mathrm{d}t$$
   (b) - Soit $t \in [0,x]$.
   $$1 - \frac{x-t}{1-at} = \frac{1-at-x+t}{1-at} = \frac{(1-x)+t(1-a)}{1-at}$$
   On a $1-x \geqslant 0$, $t(1-a) \geqslant 0$. De plus $at < t \leqslant x \leqslant 1$ donc $1-at > 0$.
   Donc $1 - \dfrac{x-t}{1-at} \geqslant 0$ et $\dfrac{x-t}{1-at} \leqslant 1$.
   - Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0,x]$,
   $$(1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n = (1-at)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1-at}\right)^n \text{ et } 0 \leqslant (1-at)^{\alpha-1}\left(\frac{x-t}{1-at}\right)^n \leqslant (1-at)^{\alpha-1}$$
   Par croissance de l'intégrale,
   $$0 \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1}\mathrm{d}t$$

(c) • D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant (n+1)p_{n+1} \int_0^x (x-t)^n (1-at)^{\alpha-(n+1)} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x (1-at)^{\alpha-1} \mathrm{d}t \times (n+1)p_{n+1}$$

Or, N admettant une espérance, $(n+1)p_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'où par théorème d'encadrement:

$$(n+1)p_{n+1} \int_0^x (x-t)^n (1-at)^{\alpha-(n+1)} \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Avec l'égalité de la question 7.a, $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = G(x).}$

• On a $G(1) = p_0(1-a)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N=k) = 1$. Donc $p_0 = (1-a)^{-\alpha}$.
Pour tout $x \in [0,1]$, on a $G'(x) = -a\alpha p_0 (1-ax)^{\alpha-1}$.
D'où $G'(1) = -a\alpha p_0 (1-a)^{\alpha-1}$ et comme $-\alpha a = a+b$, on a:

$$G'(1) = (a+b)\frac{1}{1-a} = \frac{a+b}{1-a} = E(N)$$

Partie 3: Formule de récursivité

9. • La famille $([N=k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales:

$$P(S=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big([S=0] \cap [N=k]\big).$$

• Or $[S=0] \cap [N=0] = [N=0]$.

• Et si $k \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$[S=0] \cap [N=k] = \bigcap_{i=1}^{k} [X_i = 0] \cap [N=k]$$

Les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes et de même loi, donc:

$$P\big([S=0] \cap [N=k]\big) = P(X_1=0)^k P(N=k)$$

• En posant $x = P(X_1=0)$, alors $x \in [0,1]$ et :

$$P(S=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = G(x) = \left(\frac{1-ax}{1-a}\right)^\alpha$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P(S=0) = \left(\frac{1-ax}{1-a}\right)^\alpha}$$

10. (a) Comme à la question précédente, $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Donc

$$P(S=0)=\sum_{k=0}^{+\infty}P\big([S=0]\cap[N=k]\big).$$

Or $[S=0]\cap[N=0]=[N=0]$. Et si $k\in\mathbb{N}^*$, $[S=0]\cap[N=k]=\bigcap_{i=1}^{k}[X_i=0]\cap[N=k]$. Les variables aléatoires X_k sont mutuellement indépendantes et de même loi, donc:

$$P\big([S=0]\cap[N=k]\big)=P(X_1=0)^kP(N=k)$$

En posant $x=P(X_1=0)$:

$$P(S=0)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(N=k)x^k=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}=e^{-\lambda(1-x)}$$

$\boxed{\text{Donc } P(S=0)=e^{-\lambda(1-P(X_1=0))}.}$

(b) La fonction simule une loi binomiale de paramètres $\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

(c) Le programme suivant convient:

```
N=grand(1,1,"poi",lambda)
s=0;
if N>=1 then
  for k=1:N
    s=s+simulX(n)
  end
end
```

11. (a) Les variables $X_1,\dots,X_{n+1}$ suivent la même loi, donc :

$$\sum_{i=1}^{n+1}E(X_i|S_{n+1}=k)=(n+1)E(X_1|S_{n+1}=k)$$

De plus, par linéarité de l'espérance:

$$\sum_{i=1}^{n+1}E(X_i|S_{n+1}=k)=E\left(\sum_{i=1}^{n+1}X_i|S_{n+1}=k\right)=E(S_{n+1}|S_{n+1}=k)=k$$

$\boxed{\text{Donc pour tout } i\in[\![1,n+1]\!],\ E(X_i|S_{n+1}=k)=\frac{k}{n+1}.}$

(b) Soit $j\in[\![0,k]\!]$. Par définition des probabilités conditionnelles,

$$\begin{aligned}P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)P(S_{n+1}=k)&=P\big([S_{n+1}=k]\cap(X_{n+1}=j)\big)\\&=P\big([S_n=k-j]\cap[X_{n+1}=j]\big)\\&=P(S_n=k-j)P(X_{n+1}=j)\\&=q_jP(S_n=k-j)\end{aligned}$$

car les variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ étant indépendantes, les événements $[S_n = k-j]$ et $[X_{n+1} = j]$ sont indépendants.

(c) Avec la question précédente:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S_n = k-j)\\
&= P(S_{n+1}=k)\left[\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)P_{[S_{n+1}=k]}(X_{n+1}=j)\right]\\
&= P(S_{n+1}=k)E\left(a+\frac{bX_{n+1}}{k}\middle| S_{n+1}=k\right) \qquad \text{Par définition de l'espérance conditionnelle}\\
&= P(S_{n+1}=k)\left(a+\frac{b}{k}E(X_{n+1}|S_{n+1}=k)\right) \qquad \text{Par linéarité de l'espérance}
\end{aligned}$$

Avec le résultat de la question 11.a:

$$\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S_n = k-j) = P(S_{n+1}=k)\left(a+\frac{b}{n+1}\right)$$

12. (a) La famille $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $j \in [\![0,k]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(S=k-j) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big([S=k-j]\cap[N=n]\big)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P\big([S_n=k-j]\cap[N=n]\big)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n=k-j)p_n
\end{aligned}$$

(b) Avec le résultat de la question précédente et la question 11.c:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S=k-j) &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a+\frac{bj}{k}\right)p_n q_j P(S_n=k-j)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\left[\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S_n=k-j)\right]\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n\left(a+\frac{b}{n+1}\right)P(S_{n+1}=k)
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n\left(a+\dfrac{b}{n+1}\right)=p_{n+1}$ car N vérifie une relation de Panjer.
On a donc bien:

$$\sum_{j=0}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S=k-j)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n+1}P(S_{n+1}=k)$$

(c) D'après la formule des probabilités totales $(([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements):

$$P(S=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\big([S=k]\cap[N=n]\big)$$

Comme $k\in\mathbb{N}^*$, $P\big([S=k]\cap[N=0]\big)=0$, on a :

$$P(S=k)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(S_n=k)P(N=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{n+1}P(S_{n+1}=k).$$

$\boxed{\text{Ainsi } P(S=k)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}p_{n+1}P(S_{n+1}=k)..}$

(d) Avec les résultats des deux questions précédentes, on a

$$\sum_{j=1}^{k}\left(a+\frac{bj}{k}\right)q_j P(S=k-j)=(1-aq_0)P(S=k)$$

Or $q_0\in[0,1]$ et $a<1$, par conséquent $aq_0\neq 1$.

$\boxed{\text{D'où } P(S=k)=\dfrac{1}{1-aq_0}\sum\limits_{j=1}^{k}\left(a+\dfrac{bj}{k}\right)q_jP(S=k-j).}$

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entrainer très régulièrement à faire des calculs;

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 10,88 et un écart-type de 5,37, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre s'intéresse aux valeurs propres d'une matrice produit de deux matrices symétriques de projections. Les notions de calcul matriciel, de projecteurs, de valeurs propres, de produit scalaire et de norme, mais aussi de matrices symétriques étaient nécessaires ici.
La première partie de l'exercice permettait de traiter sur un exemple le résultat démontré ensuite plus généralement à la deuxième partie.

Partie 1

1. Le calcul matriciel attendu ici fut en général bien effectué.
2. (a) Principalement à cette question, les candidats se sont contentés d'affirmer que le rang de la matrice était égal à 1 car les deux colonnes de la matrice étaient égales. Il ne faut pas oublier de préciser que cette matrice est non nulle.
   L'oubli dans l'énoncé de la valeur $a = -1$ particulière pour le calcul du rang de AB a été signalé par certains rares candidats. Les candidats n'ayant rien signalé n'ont pas été sanctionné.

   (b) Le calcul de $u \circ v(x_0)$ n'a pas posé de problème et sa colinéarité à x_0 a en général été clairement montré. Cependant trop de candidats oublient de vérifier que $x_0 \neq 0$.

(c) Résoudre le système donné par la relation $(A - \lambda I_2)X = 0$, ou chercher le rang de $(A - \lambda I_2)$ pour ensuite déterminer les valeurs propres était tout à fait possible, mais ne correspondait pas à l'esprit du sujet. Les candidats ayant suivi cette piste perdaient beaucoup de temps et certains ont pu obtenir des résultats contradictoires par rapport aux questions précédentes.
Ici, une analyse des questions précédentes permettait de répondre rapidement. Cependant, une rédaction précise était attendue, elle devait indiquer bien-sûr les valeurs propres trouvées précédemment et justifier proprement que ces valeurs propres étaient les seules. On rappelle que le polynôme caractéristique n'est pas au programme en ECS, et les copies utilisant cette notion n'obtiennent alors aucun point à la question.

3. (a) La manipulation des inégalités reste très délicate pour une très grande majorité des candidats. Les identités remarquables ne sont pas évidentes pour beaucoup, et la valeur propre 0 est souvent oubliée.
   (b) À cette question, une équivalence est attendue. Beaucoup se limitent à déterminer a quand $u \circ v$ est un projecteur. La réciproque est ici nécessaire.
4. La première partie de cette question n'a pas réellement posé de problème sauf pour certains qui ne savent pas déterminer la transposée d'un produit matriciel ou encore pour ceux qui pensent que le produit matriciel est commutatif (on rappelle que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX^tBBX$ ne peut pas être égal à ${}^tXX^tBB$, ces deux objets n'ont en général pas la même nature). Pour la deuxième partie, peu de candidats ont pensé à l'inégalité de Cauchy-Schwarz mais cette inégalité n'est pas toujours bien connue. Pour la conclusion de cette deuxième partie, peu pensent à préciser que $\|BX\| \neq 0$ et à traiter à part le cas $\|BX\| = 0$.
5. L'argument de symétrie de la matrice C est en général clairement vu. Cependant, beaucoup justifient cette symétrie en affirmant que le produit de deux matrices symétriques est symétrique (ce qui est faux en général), de même le produit de deux matrices diagonalisables n'est pas diagonalisable a priori. Une vérification simple et surtout correcte était attendue.
6. (a) Cette question a posé peu de problème pour les candidats l'ayant abordée. Les hypothèses faites sur A, B, C et X étaient à utiliser ici. Cependant, beaucoup oublient le carré sur $\|X\|$.
   (b) La résolution de cette question est assez classique et s'apparente à une question de cours. Il ne faut cependant pas oublier de préciser et de justifier la non nullité de $\|X\|$.
7. (a) Pour montrer que BX est un vecteur propre de C, il est effectivement indispensable de prouver que CBX et BX sont colinéaires, mais aussi que BX est un vecteur non nul. Beaucoup oublient cette dernière assertion.
   (b) L'hypothèse $A^2 = A$ est nécessaire pour prouver la première égalité. Pour prouver la seconde égalité, il est indispensable de préciser que $\mu \neq 0$.
   (c) Cette question se résout en utilisant la question précédente et la symétrie de A ainsi que la définition de μ.
8. La majorité des candidats utilisent la question précédente et l'inégalité prouvée à la question 4, cependant il faut bien préciser que $\|X\| > 0$ pour diviser l'inégalité obtenue par $\|X\|$. Enfin beaucoup oublient de traiter le cas $\mu = 0$, exclu dans la question 7.

Exercice 2

Cet exercice d'analyse ne présentait pas de grandes difficultés à part la manipulation de la relation $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Après quelques questions d'application directe du cours sur les fonctions de plusieurs variables, l'étude d'une suite récurrente double mène au calcul de la somme d'une série convergente.

1. La première partie de cette question $\varphi > 1$ est souvent oubliée.
   Pour répondre à la deuxième partie, il est possible de déterminer les racines d'un polynôme, il faut alors bien penser à vérifier proprement que la deuxième racine est égale à $\dfrac{-1}{\varphi}$, mais il est possible aussi de vérifier que les deux réels donnés sont bien solutions de l'équation, il faut alors bien justifier sue ces deux solutions sont les seules solutions de l'équation donnée.

2. (a) Aucune difficulté n'a été rencontrée par les candidats pour traiter cette question. Cependant f n'est pas un polynôme, mais une fonction polynomiale ici.

   (b) La définition d'un point critique est bien connue. La résolution du système pose de nombreuses difficultés. Beaucoup trop de candidats ne mènent pas cette résolution jusqu'au bout, ou oublient de vérifier que $\dfrac{-1}{\varphi} + 1 = \dfrac{1}{\varphi + 1}$.

   (c) Cette question fut peu abordée. La hessienne est en général correctement déterminée. La méthode à utiliser ensuite est en général bien acquise. Mais la recherche des valeurs propres de la hessienne semble avoir été d'une grande difficulté pour de nombreux candidats. À noter cependant que les candidats sachant bien manipuler les relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 2 étaient très avantagés. Certains, très rares, utilisent les formes quadratiques.

3. Majoritairement, cette question a été correctement traitée. Cependant, certains ne maîtrisent pas la démonstration par récurrence, d'autres se lancent dans des calculs interminables.

4. (a) Encore trop de candidats n'abordent pas cette question d'informatique. Les premières lignes de ce programme informatique sont correctement remplies. Trop cependant concluent ce programme par `u=disp(u)`. L'utilisation de la question précédente dans ce programme était très maladroite et les programmes l'utilisant étaient faux.

   (b) Dans cette question, il est attendu que les candidats reconnaissent une suite récurrente linéaire double et donnent son équation caractéristique, puis à l'aide des conditions initiales déterminent les constantes. Les calculs à nouveau furent souvent non terminés car mal menés dès le départ.

   (c) Cette question est peu traitée et en général très mal traitée. La détermination d'un équivalent de u_n permet de conclure rapidement.

5. (a) Un critère d'équivalence permet de conclure ici. L'équivalent du terme général n'est pas toujours correct. Par ailleurs la série de terme général $\dfrac{1}{u_n^2}$ n'est pas une série de Riemann. Ainsi l'équivalent faux $\dfrac{1}{u_n u_{n+1}} \sim \dfrac{1}{u_n^2}$ ne permettait pas de conclure. Les séries géométriques et les séries de Riemann sont trop souvent confondues. On rappelle que le fait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ne permet pas de conclure quant à la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

   (b) Le lien entre la convergence absolue et la convergence d'une série est en général bien acquis. Mais la définition d'une série convergente est trop peu connue, ainsi le lien entre la convergence d'une série et la suite des sommes partielles n'est pas établie. On rappelle que la convergence absolue de la suite (S_n) n'a pas de sens. Clairement les notions de suites et de séries sont confuses et se mélangent l'une et l'autre. Ici une majoration de la somme partielle S_n ne permet pas de conclure, car cette somme partielle n'est pas la somme partielle d'une série à termes positifs. De même, un critère d'équivalence ne pouvait pas être utilisé ici.

(c) Cette question est peu traitée. C'est dommage, car l'utilisation de l'expression de S_n permet de conclure facilement.

(d) Cette question est peu traitée et quand elle est abordée, les candidats n'aboutissent pas à l'égalité demandée.

Problème

Le problème proposé cette année portait essentiellement sur l'étude des variables aléatoires vérifiant une relation de Panjer. Il fait appel aux notions liées aux variables aléatoires discrètes et aussi aux notions d'analyse, il demandait également dans les dernières questions une bonne dextérité dans les calculs et une capacité de synthèse des questions précédentes.
Le problème était assez long et de difficultés progressive. Il était séparé en parties indépendantes, pour permettre d'une part de départager les candidats, et de permettre à ces derniers de prendre des points sur de nombreuses questions.

Partie 1 - Variables vérifiant une relation de Panjer

1. (a) Dans cette question apparait la première récurrence du problème, il est important de bien détailler et rédiger une telle récurrence. Les raisonnements par itération n'étaient pas acceptés. L'initialisation est trop souvent omise.

   (b) Cette question est dans l'ensemble plutôt bien traitée. Mais certains cependant ne déterminent pas la valeur de $P(N = 0)$ et peinent donc à conclure. La deuxième partie de la question, à savoir la valeur de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire de Poisson est peu traitée et parfois incorrectement. Il est recommandé de bien lire l'énoncé dans son ensemble.

2. (a) Le raisonnement par récurrence, simple ici, doit quand même être indiqué et de préférence détaillé rapidement.

   (b) Une grande majorité des candidats montrent correctement que N suit une loi de Bernoulli, mais beaucoup peinent à déterminer le paramètre de cette loi ou le confondent avec $P(N = 0)$.

3. (a) Une question ne demandant qu'une manipulation des expressions, était en général bien traitée. Certaines explications sont parfois un peu étranges, il n'était pas nécessaire de discuter sur cette question, seuls des calculs étaient attendus.

   (b) La relation de Panjer est en général bien vérifiée, mais les valeurs de k pour lesquelles cette vérification est faite ne sont pas précisées. Or, le calcul est bien différent lorsque k est soit inférieur à n ou supérieur à $n+1$ (ce dernier cas semble avoir été complètement omis par une très grande majorité des candidats). De même, trop peu de candidats pensent à vérifier que $P(N = 0) \neq 1$. La seule donnée des valeurs de a et de b ne constitue pas une réponse suffisante à cette question.

4. (a) L'argument essentiel de cette question est que : $P(N=0) \neq 0$. Il apparait bien trop peu dans les copies.

   (b) L'utilisation de la relation de Panjer est l'élément principal de cette question. Elle fut en général bien effectuée.

   (c) Ce raisonnement pour prouver l'existence de l'espérance d'une variable aléatoire discrète est normalement rencontré au cours des deux années de préparation lors de la démonstration de cette existence quand la série $\sum_{n\geqslant 0} P(N \geqslant n+1)$ converge. Cependant le choix a été fait ici de détailler cette question.

   Les candidats cependant ont éprouvé des difficultés à prouver la première partie de la question et n'ont pas opté pour l'admettre et poursuivre cette démarche.

   (d) Cette question peu détaillée permettait aux candidats de montrer leur maîtrise de la démonstration des questions précédentes pour l'adapter au cas présent. Très peu de candidats l'ont abordé.

   (e) La formule de Koenig-Huygens est bien connue et rappelée correctement ici. Bon nombre de candidats ont admis la question précédente pour répondre à cette question.

   (f) L'équivalence demandée ici était en général partiellement démontrée sans que les candidats s'en rendent compte. La réciproque bien que démontrée précédemment dans le sujet devait être rappelée ici.

Partie 2 - Fonction génératrice

5. En très grande majorité, les candidats ont utilisé le critère de majoration des séries à termes positifs pour prouver la convergence de la série considérée. Majorer $|x^k|$ par 1 permettait de conclure rapidement. Il était également possible d'utiliser la majoration $|p_k|$ par 1, mais il fallait alors bien penser à distinguer le cas $|x| < 1$ du cas $x = 1$.

6. Un raisonnement par récurrence soigné et détaillé est attendu ici. En particulier l'obtention de p_{k+1} doit être bien indiquée. Beaucoup trop de candidats truandent les calculs (l'honnêteté de certains précisant un problème dans leur calcul au vu du résultat est toujours bien appréciée). Le calcul de dérivée n'est pas toujours acquis.

7. (a) La formule de Taylor est à reconnaitre ici. Beaucoup l'ont fait, mais n'en vérifient pas les hypothèses et donnent directement l'égalité de l'énoncé. Un rappel des hypothèses et de la formule de Taylor dans le cas général est attendu ici.

   (b) La première inégalité à démontrer a posé de grandes difficultés et a fait apparaître de nombreuses incohérences ou manipulations hasardeuses des inégalités. Elle fait partie des inégalités courantes à savoir démontrer. Il est possible cependant d'admettre cette première inégalité pour prouver la deuxième partie de la question. La positivité est encore à montrer proprement et rapidement. L'argument de croissance de l'intégrale est attendue.

   (c) Cette question de synthèse n'est pas toujours bien comprise et surtout peu abordée. Il n'était pas demandé de prouver de manière générale que $G'(1) = E(N)$, mais seulement de vérifier l'égalité dans le cas présent.

Partie 3 - formule de récursivité

9. Dans cette question comme dans la suivante, la formule des probabilités totales doit être utilisée. Lors de son emploi, le système complet d'événements choisi doit être très clairement indiqué.
   Elle est peu abordée et trop souvent bâclée.

10. (a) Comme à la question précédente, la formule des probabilités totales est indispensable. Le raisonnement est sensiblement le même qu'à la question précédente. Si la question précédente est traitée correctement, une rédaction succincte est acceptée ici.
    (b) La lecture de ce programme informatique est en général faite et son interprétation correctement réalisée. Quelques rares candidats semblent confondre la loi binomiale et la loi géométrique.
    (c) Un bon nombre de candidats se sont lancés dans l'écriture de ce programme. En général les propositions étaient tout à fait acceptables. Attention au recours à la commande `sum()` un peu douteuse. L'initialisation `s=0` est parfois mal placée.

11. (a) L'espérance conditionnelle est abordée ici de manière peu habituelle. Cependant les notions utilisées sont au programme. Les futurs candidats sont invités à bien étudier les propriétés de l'espérance et de les écrire clairement dans le cas de l'espérance conditionnelle.
    Cette question était abordée par de très rares candidats qui en général dominaient largement le sujet proposé.
    (b) Peu de candidats ont abordé cette question qui nécessitait uniquement la définition de la probabilité conditionnelle et le lemme des coalitions, en général bien connus des candidats.
    (c) La présentation de cette question est un peu rebutante. Sa résolution était pourtant à la portée d'un grand nombre de candidats, car découlant assez directement des questions précédentes.

12. Cette dernière question du sujet ne fut pratiquement jamais abordée.