2022

ANNALES

Mathématiques E

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

Option Economique

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie I

1. En notant $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $F = \{aI_3 + bJ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = Vect(I_3, J)$.
   Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, engendré par la famille (I_3, J). Cette famille, constituée de deux matrices non colinéaires, est libre.
   Ainsi, la famille (I_3, J) est une base de F, et F est de dimension 2.

2. G n'est pas stable par multiplication externe, en effet $I_3^2 = I_3$, donc $I_3 \in G$.
   Cependant, $(2I_3)^2 = 4I_3 \neq 2I_3$, donc $2I_3 \notin G$.
   Donc G n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3. (a) D'une part, $A = \dfrac{2}{3}I_3 - \dfrac{1}{3}J$, donc $A \in F$. D'autre part, $A^2 = A$, donc $A \in G$. Donc $A \in F \cap G$.

   (b) $A^2 - A = 0$, donc le polynôme : $P(X) = X^2 - X$ est un polynôme annulateur de A.

   (c)
   - Or le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.
     Et $P(X) = X(X-1)$. Donc le polynôme P a exactement deux racines : 0 et 1, ainsi $Sp(A) \subset \{0, 1\}$.
   - Remarquons que $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Donc Vect $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \subset E_0(A)$.

     Donc 0 est bien valeur propre de A.
   - On a : $A - I_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
     Remarquons alors qu'on a : $(A - I_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et que $(A - I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
     Donc Vect $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \subset E_1(A)$. Donc 1 est bien valeur propre de A.
   - On a donc $\dim E_0(A) \geqslant 1$ et $\dim E_1(A) \geqslant 2$. Or les sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Donc $\dim E_0(A) + \dim E_1(A) \leqslant 3$.
     Donc $\dim E_0(A) = 1$ et $\dim E_1(A) = 2$.

     Ainsi $E_0(A) = $ Vect $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $E_1(A) = $ Vect $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

(d) 0 est valeur propre de A, $\boxed{\text{donc } A \text{ n'est pas inversible.}}$

Et A est symétrique, $\boxed{\text{donc } A \text{ est diagonalisable.}}$

Partie II

4. (a)

$$M \in G \iff M^2 = M \iff \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab+b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & a^2+2b^2 & 2ab+b^2 \\ 2ab+b^2 & 2ab+b^2 & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}.$$

Ainsi $M \in G \iff \begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases}$

(b) On résout alors le système :

$$\begin{cases} a^2+2b^2 = a \\ b(b+2a-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ a^2 = a \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a^2+2(1-2a)^2 = 0 \\ b = 1-2a \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \text{ ou } a = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1/3 \text{ ou } a = 2/3 \\ b = 1-2a \end{cases}$$

Donc $F \cap G = \{0_3, I_3, A, I_3 - A\}$.

5. On a : $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B ne sont pas colinéaires, donc la famille (A, B) est libre.
De plus $\mathrm{Card}((A, B)) = \dim F = 2$, donc la famille (A, B) est une base de F.

6. (a) **Remarque importante :** l'énoncé comportait une erreur sur la valeur des coefficients α et β. Cette question a donc été neutralisée lors de la correction et le barème modifié en conséquence (voir les commentaires détaillés pour cette question)
En notant : $\alpha = a - b$ et $\beta = a + 2b$, on a :

$$\alpha A + \beta B = \frac{a-b}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{a+2b}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = M.$$

Donc $M = (a-b)A + (a+2b)B$.

(b) $AB = A(I_3 - A) = A - A^2 = 0$ et $BA = (I_3 - A)A = 0$. Donc $AB = BA = 0$.

(c) Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

Initialisation On a $\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = I_3 = M^0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $M^n = \alpha^n A + \beta^n B$.

Alors :

$$\begin{array}{rcl} M^{n+1} & = & M^n M \\ & = & (\alpha^n A + \beta^n B)(\alpha A + \beta B) \\ & = & \alpha^{n+1} A^2 + \alpha^n \beta AB + \beta^n \alpha BA + \beta^{n+1} B^2 \\ & = & \alpha^{n+1} A + \beta^{n+1} B, \end{array}$$

Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \alpha^n A + \beta^n B.}$

7. (a)
- Si $\alpha = 0$, alors $M = \beta B$. Or, la matrice B comporte trois lignes identiques, donc elle n'est pas inversible, et ainsi M n'est pas inversible.
- De même, si $\beta = 0$, alors $M = \alpha A$, et A n'est pas inversible d'après la question $3d$, donc M n'est pas inversible.
- Si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, alors :

$$(\alpha A + \beta B)\left(\frac{1}{\alpha} A + \frac{1}{\beta} B\right) = A + \frac{\alpha}{\beta} AB + \frac{\beta}{\alpha} BA + B = A + B = I_3.$$

Donc la matrice M est inversible.

$\boxed{\text{Donc } M \text{ est inversible si et seulement si } \alpha \neq 0 \text{ et } \beta \neq 0.}$

(b) Si α et β sont deux réels non nuls, on a :

$$(\alpha^n A + \beta^n B)\left(\alpha^{-n} A + \beta^{-n} B\right) = A + \alpha^n \beta^{-n} AB + \beta^n \alpha^{-n} BA + B = A + B = I_3.$$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N},\ M^{-n} = \alpha^{-n} A + \beta^{-n} B.}$

Partie III

8. $I_3 - T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -A - 4B.$

9. En utilisant les notations de la partie II,

$$I_3 - T = \alpha A + \beta B, \quad \text{avec} \quad \alpha = -1 \text{ et } \beta = -4.$$

Les réels α et β étant non nuls, la matrice $I_3 - T$ est inversible, et :

$$(I_3 - T)^{-1} = \alpha^{-1} A + \beta^{-1} B = -A - \frac{1}{4} B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } (I_3 - T)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.}$$

10.
$$\begin{aligned} L = TL + Y &\iff (I_3 - T)L = Y \\ &\iff L = (I_3 - T)^{-1}Y \\ &\iff L = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi il existe une unique matrice $L = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ telle que $L = TL + Y$.

11. Pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = TX_n + Y$ et $L = TL + Y$.
En retranchant la deuxième égalité de la première, on obtient directement : $X_{n+1} - L = T(X_n - L)$.
Montrons alors par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n - L = T^n(X_0 - L)$.
Initialisation On a $T^0(X_0 - L) = I_3(X_0 - L) = X_0 - L$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $X_n - L = T^n(X_0 - L)$.
Alors :
$$\begin{aligned} X_{n+1} - L &= T(X_n - L) \\ &= TT^n(X_0 - L) \\ &= T^{n+1}(X_0 - L), \end{aligned}$$
Ainsi par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n - L = T^n(X_0 - L)$.

12. Exprimons dans un premier temps T^n en fonction de n : remarquons alors que :$T = 3I_3 + J = 2A + 5B$.
Donc d'après la question 6c, $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = 2^n A + 5^n B$.
Ainsi, d'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = (2^n A + 5^n B)(X_0 - L) + L$.

Exercice 2

Partie I : Étude de la fonction g

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2. (a) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :
$$\forall x > 0,\ h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0.$$
Donc la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, donc h réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Ainsi, tout réel admet un unique antécédent par h.
En particulier : il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$.
Or, $h\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) < 0$ et $h(1) = 1 > 0$, donc $h\left(\frac{1}{2}\right) < h(\alpha) < h(1)$.
Et h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

(c)

$$\forall x > 0,\ g'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right)g(x) = \frac{1}{x^2}\big(\ln(x) + 2x - 1\big)g(x)$$

Ainsi $\forall x > 0,\ g'(x) = \frac{1}{x^2}\ h(x)g(x)$.

(d) D'après la question 2(b), h est négative sur $]0,\alpha]$ et positive sur $[\alpha,+\infty[$.
De plus, pour tout réel x strictement positif, $\frac{1}{x^2}g(x) > 0$.
Donc par produit, g' est négative sur $]0,\alpha]$ et positive sur $[\alpha,+\infty[$.
Donc la fonction g est décroissante sur $]0,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

3.

$$\begin{aligned} g(x) - x^2 &= \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) - x^2 \\ &= x^2\left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

Or $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\frac{-\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc :

$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(x)}{x}.$$

Ainsi :

$$g(x) - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ln(x).$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

4. **Initialisation** $u_0 > 0$ d'après l'énoncé.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 0$.
Or g est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$.

Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et strictement positif.

5.
```
function y=u(u0,n)
    x=u0
    X=[x]
    for i=1:n
        x=x^(2-1/x)
        X=[X,x]
    end
    y=X
    endfunction
```

6. (a) Pour tout réel $x > 0$, $x - 1$ et $\ln(x)$ sont de même signe (c'est-à-dire négatif pour $x \leqslant 1$ et positif pour $x \geqslant 1$).
Donc $\forall x > 0,\ (x-1)\ln(x) \geqslant 0$.

(b) $\forall x > 0,\ \dfrac{g(x)}{x} = x^{1-1/x} = \exp\left(\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \exp\left(\dfrac{(x-1)\ln(x)}{x}\right)$.
Et d'après la question précédente :

$$\forall x > 0,\ \frac{(x-1)\ln(x)}{x} \geqslant 0,$$

donc par croissance de l'exponentielle, $\forall x > 0,\ \dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.

(c) En multipliant par $x > 0$ dans l'inégalité précédente, $\forall x > 0,\ g(x) \geqslant x$.

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ g(x) = x &\iff \frac{g(x)}{x} = 1 \\ &\iff x^{1-1/x} = 1 \\ &\iff \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right) = 1 \\ &\iff \frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0 \\ &\iff x = 1. \end{aligned}$$

Donc l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution $x = 1$.

7. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$, donc d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \geqslant u_n.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

8. (a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Initialisation Par hypothèse, $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Comme (u_n) est croissante, $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
Et

$$\begin{aligned} u_n \geqslant \frac{1}{2} \quad & \text{donc} \quad 2 - \frac{1}{u_n} \geqslant 0 \\ & \text{donc} \quad \left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \ln(u_n) \leqslant 0 \quad (\text{car } \ln(u_n) \leqslant 0) \\ & \text{donc} \quad u_{n+1} \leqslant 1, \end{aligned}$$

Finalement : $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Ainsi par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].}$

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante est majorée par 1, donc converge vers un réel λ.
Or, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$, donc par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ (g est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$), $\lambda = g(\lambda)$. Donc $\lambda = 1$, d'après la question 6c.

$\boxed{\text{Ainsi la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$

9. (a) Montrons par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.

Initialisation $u_0 > 1$ d'après l'énoncé.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 1$.

La fonction g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ (car $\alpha < 1$), donc $g(u_n) > g(1)$, donc $u_{n+1} > 1$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1.}$

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.
Supposons qu'elle converge : dans ce cas, sa limite vaut 1.
Cependant, pour tout entier naturel n, $u_n > u_0 > 1$, donc par passage à la limite, lorsque n tend vers $+\infty$: $1 \geqslant u_0 > 1$. Ce qui est impossible

$\boxed{\text{Donc la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$

10. Supposons que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$. La fonction g est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (puisque $\alpha > \frac{1}{2}$), donc $g(u_0) > g\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire : $u_1 > 1$. On se ramène, avec un décalage d'indice, à la question précédente.

$\boxed{\text{Donc la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty \text{ et n'est donc pas convergente.}}$

Partie III : Extrema de la fonction f

11. $f = \exp\left(\left(v - \dfrac{1}{u}\right)\ln \circ u\right)$, avec $u : (x,y) \longmapsto x$ et $v : (x,y) \longmapsto y$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, comme fonctions polynomiales.

Ainsi, $\ln \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par composition, et $\dfrac{1}{u}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ comme inverse d'une telle fonction ne s'annulant pas sur cet ensemble.

Donc par somme et par produit, $\left(v - \dfrac{1}{u}\right)\ln \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, puis en composant par exp, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.}$

12. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \partial_1(f)(x,y) = \left(\dfrac{1}{x^2}\ln(x) + \left(y - \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{1}{x}\right) f(x,y) = \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y)$.

Et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \partial_2(f)(x,y) = \ln(x)\exp\left(\left(y - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \ln(x) f(x,y)$.

13. (x,y) est un point critique de f sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ si et seulement si $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\nabla(f)(x,y) = (0,0)$.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \nabla(f)(x,y) = (0,0) \quad &\iff \begin{cases} \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) = 0 \\ \ln(x) f(x,y) = 0. \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} = 0 \\ \ln(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{car } f(x,y) \neq 0) \\
&\iff \begin{cases} xy - 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\
&\iff x = y = 1.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi la fonction } f \text{ admet un unique point critique } a, \text{ de coordonnées } (1,1).}$

14. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \partial_{1,1}^2(f)(x,y) = \dfrac{(1/x + y)x^2 - 2x(\ln(x) + xy - 1)}{x^4} f(x,y) + \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2}\partial_1(f) f(x,y)$.

Puis en remarquant que : $\begin{cases} \ln(1) + 1 - 1 = 0 \\ f(1,1) = 1 \\ \partial_1(f)(1,1) = 0 \end{cases}$, on obtient directement : $\partial_{1,1}^2(f)(a) = 2$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \partial_{2,2}^2(f)(x,y) = \ln(x)\partial_2(f)(x,y)$, donc $\partial_{2,2}^2(f)(a) = 0$.

Enfin, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \partial_{1,2}^2(f)(x,y) = \partial_{2,1}^2(f)(x,y) = \dfrac{1}{x} f(x,y) + \ln(x)\partial_1(f)(x,y)$,

donc $\partial_{1,2}^2(f)(a) = \partial_{2,1}^2(f)(a) = 1$.

$\boxed{\text{Ainsi la matrice hessienne de } f \text{ au point } a \text{ est la matrice } H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

15. Déterminons les valeurs propres de la matrice H :

$$\begin{aligned}\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\in Sp(H) &\iff \det(H-\lambda I_2)=0\\ &\iff (2-\lambda)\cdot(-\lambda)-1=0\\ &\iff \lambda^2-2\lambda-1=0.\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice H admet deux valeurs propres : $\lambda_1=1-\sqrt{2}<0$ et $\lambda_2=1+\sqrt{2}>0$. Ces deux valeurs propres sont non nulles et de signes opposés, donc f n'admet pas d'extremum local en a.

16. Supposons que f admette un extremum global sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. Cet extremum est alors a fortiori un extremum local.
Or, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, donc cet extremum ne peut être atteint qu'en un point critique.
Or d'après les questions précédentes f n'a qu'un point critique, et qu'elle n'admet pas d'extremum local en ce point critique.
Donc la fonction f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

Exercice 3

Partie I

1. (a) On réalise n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès : $\dfrac{1}{3}$ (On considère que le succès est de placer le jeton dans l'urne 1).
X_n représente le nombre de succès, donc X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{3}$.
De même Y_n et Z_n suivent la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{3}$.

(b) $P(X_n=0)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, et $P(X_n=n)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(c) L'événement $(Y_n=0)\cap(Z_n=0)$ est réalisé si et seulement si aucun jeton n'a été placé dans l'urne U_2 et aucun jeton n'a été placé dans l'urne U_3, si et seulement si les n jetons ont été placés dans l'urne U_1, si et seulement si l'événement $(X_n=n)$ est réalisé.
Donc $(Y_n=0)\cap(Z_n=0)=(X_n=n)$.

(d) L'événement V_n est réalisé si et seulement si au moins l'une des trois urnes n'a reçu aucun jeton :
Donc $V_n=(X_n=0)\cup(Y_n=0)\cup(Z_n=0)$.

(e) Appliquons la formule du crible pour le calcul de $P(V_n)$:

$$\begin{aligned}P(V_n) \;=\;& P(X_n=0)+P(Y_n=0)+P(Z_n=0)\\ &-P\big((X_n=0)\cap(Y_n=0)\big)-P\big((X_n=0)\cap(Z_n=0)\big)-P\big((Y_n=0)\cap(Z_n=0)\big)\\ &+P\big((X_n=0)\cap(Y_n=0)\cap(Z_n=0)\big).\end{aligned}$$

Et $P\big((X_n = 0) \cap (Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)\big) = 0$ (comme $n \geqslant 1$), les trois urnes ne peuvent pas rester vides après le placement des jetons).
Et d'après la question 1c, $P\big((X_n = 0) \cap (Y_n = 0)\big) = P(Z_n = n)$,
$P\big((X_n = 0) \cap (Z_n = 0)\big) = P(Y_n = n)$ et $P\big((Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)\big) = P(X_n = n)$.
Donc $P(V_n) = P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) - \Big(P(X_n = n) + P(Y_n = n) + P(Z_n = n)\Big)$.

Donc $P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2. $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$, et la suite (V_n) est une suite décroissante d'événements, donc :

$$P(V) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(V_n).$$

De plus, $0 < \frac{1}{3} < 1$ et $0 < \frac{2}{3} < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} P(V_n) = 0$.

Ainsi $P(V) = 0$.

3. (a)

```
function t=T()
    X=0
    Y=0
    Z=0
    n=0
    liste=[X,Y,Z]
    while prod(liste)==0 // tant qu au moins un coeff est nul
        i=grand(1,1,'uin',1,3) // choix d un nombre entier entre 1 et 3
        liste(i)= 1
        n=n+1
    end
    t=n
endfunction
```

(b)

```
N=10000
S=0
for i=1:N
        S=S+T()
end
disp(S/N)
```

4. Il faut placer au moins trois jetons pour que chacune des trois urnes contienne au moins un jeton. Et la variable aléatoire T peut prendre toutes les valeurs entières supérieures ou égales à 3.

Donc $T(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$.

5. $\forall n \in T(\Omega),\ (T > n-1) = (T = n) \cup (T > n)$.
Donc par disjonction : $P(T > n-1) = P(T = n) + P(T > n)$,
donc $P(T = n) = P(T > n-1) - P(T > n)$.
De plus, pour tout entier naturel k, l'événement $(T > k)$ est réalisé si et seulement si il a fallu strictement plus que k jetons pour "remplir" les trois urnes, si et seulement si après le placement des k premiers jetons au moins une des trois urnes est restée vide, si et seulement si l'événement V_k est réalisé :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(T > k) = P(V_k).$$
Ainsi $\forall n \in T(\Omega), \quad P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n)$.

6. On peut par exemple commencer par expliciter la loi de T (même si un calcul direct de l'espérance est possible ...) :
$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 3,\ P(T = n) &= P(V_{n-1}) - P(V_n) \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\
&= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$
Et T admet une espérance si seulement si la série de terme général $nP(T = n)$ converge absolument, c'est-à-dire si et seulement si cette série converge (série de terme général positif).
$$\forall n \geqslant 3, \quad nP(T = n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$
Or les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ convergent et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 9 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}.$$
Donc par linéarité, T admet une espérance et
$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= -1 - 2\cdot\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 2 + 4\cdot\frac{1}{3} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 + 9 - \frac{9}{2}
\end{aligned}$$
Ainsi la variable aléatoire T admet une espérance, et $E(T) = \dfrac{11}{2}$.

Partie II

7. (a) $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $W_2(\Omega) = \{1,2\}$

◇ $P\Big((X_2 = 0) \cap (W_2 = 1)\Big) = P\Big((Y_2 = 1) \cap (Z_2 = 1\Big) = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$.

◇ $P\Big((X_2 = 0) \cap (W_2 = 2)\Big) = P(Y_2 = 2) + P(Z_2 = 2) = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{9}$.

◇ $(X_2 = 1) \subset (W_2 = 1)$, donc $P\Big((X_2 = 1) \cap (W_2 = 1)\Big) = P(X_2 = 1) = \dfrac{4}{9}$
et $P\Big((X_2 = 1) \cap (W_2 = 2)\Big) = 0$.

◇ Enfin, $(X_2 = 2) \subset (W_2 = 2)$, donc $P\Big((X_2 = 2) \cap (W_2 = 1)\Big) = 0$
et $P\Big((X_2 = 2) \cap (W_2 = 2)\Big) = P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{9}$.

Alors la loi conjointe peut être donnée par le tableau suivant :

X_2 \ W_2	0	1	2
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

(b) On rappelle que $W_2(\Omega) = \{1,2\}$. D'après la formule des probabilités totales appliquées à $W_2 = 1$:

$$P(W_2 = 1) = P\Big((X_2 = 0) \cap (W_2 = 1)\Big) + P\Big((X_2 = 1) \cap (W_2 = 1)\Big) + P\Big((X_2 = 2) \cap (W_2 = 1)\Big)$$

Donc $P(W_2 = 1) = \dfrac{2}{3}$.

De même

$$P(W_2 = 2) = P\Big((X_2 = 0) \cap (W_2 = 2)\Big) + P\Big((X_2 = 1) \cap (W_2 = 2)\Big) + P\Big((X_2 = 2) \cap (W_2 = 2)\Big)$$

Donc $P(W_2 = 2) = \dfrac{1}{3}$.

Calculons maintenant l'espérance de W_2 :

$$E(W_2) = 1 \cdot P(W_2 = 1) + 2 \cdot P(W_2 = 2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

(c)

$$\begin{aligned} E(W_2X_2) &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=0}^{2} ijP\Big((W_2=i)\cap(X_2=j)\Big)\right) \\ &= 1\cdot 1\cdot \frac{4}{9} + 2\cdot 2\cdot \frac{1}{9} \qquad \text{(Il n'y a que deux termes non nuls dans la somme)} \\ &= \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Et $Cov(W_2, X_2) = E(W_2X_2) - E(W_2)E(X_2) = \dfrac{8}{9} - 2\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{3} = 0.$

Donc $Cov(W_2, X_2) = 0.$

(d) $P\left((X_2 = 1)\cap(W_2 = 2)\right) = 0$, tandis que $P(X_2 = 1)\cdot P(W_2 = 2) = \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{3} \neq 0$,

donc les variables aléatoires X_2 et W_2 ne sont pas indépendantes.

8. Ici, $n \geqslant 3$, donc au moins 3 jetons sont placés. Donc après le placement des n jetons, le nombre d'urnes restant vides peut être 0, 1 ou 2 : Donc $W_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

9. (a) Soit $i \in [\![1,3]\!]$. La variable aléatoire $W_{n,i}$ suit une loi de Bernoulli, donc $E(W_{n,i}) = P(W_{n,i} = 1)$.
Or, $P(W_{n,i} = 1)$ est la probabilité que l'urne i ne reçoive aucun jeton,
donc $P(W_{n,i} = 1) = P(X_n = 0) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Donc $\forall i \in [\![1,3]\!],\ E(W_{n,i}) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

(b) $W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}$.

(c) Par linéarité de l'espérance :

$$E(W_n) = E(W_{n,1}) + E(W_{n,2}) + E(W_{n,3})$$

Donc $E(W_n) = 3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

10. ◇ Si l'urne 1 reçoit les n premiers jetons, les deux autres urnes restent vides, donc $(X_n = n) \subset (W_n = 2)$.

Donc $P\Big((X_n = n)\cap(W_n = 2)\Big) = P(X_n = n) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

◇ Si l'urne 1 reçoit au moins un jeton sans recevoir tous les jetons, cette urne est non vide, et au moins une des autres urnes n'est pas vide : il y a alors au plus une urne vide. Ainsi, si $\leqslant k \leqslant n-1$, les événements $(X_n = k)$ et $(W_n = 2)$ sont incompatibles : Donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ P\Big((X_n = k)\cap(W_n = 2)\Big) = 0$.

11. ◇ Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Par équiprobabilité, $P\Big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big) = \dfrac{\text{Card}\Big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Pour réaliser l'événement $(X_n = k) \cap (W_n = 1)$, il faut :

- Choisir k jetons parmi les n jetons et les placer dans l'urne 1 : $\dbinom{n}{k}$ possibilités.
- Choisir l'une des deux autres urnes et y placer les jetons restant : 2 possibilités.

Donc $\text{Card}\Big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big) = 2\dbinom{k}{n}$.

Ainsi, $P\Big(X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big) = \dfrac{2\dbinom{n}{k}}{3^n}$.

◇ On rappelle que $(X_n = n) \subset (W_n = 2)$, donc les événements $(X_n = n)$ et $(W_n = 1)$ sont incompatibles.

Donc $P\Big((X_n = n) \cap (W_n = 1)\Big) = 0$.

12.

$$\begin{aligned}
E(X_nW_n) &= \sum_{i=0}^{2}\left(\sum_{k=0}^{n} i \cdot k \cdot P\Big((W_n = i) \cap (X_n = k)\Big)\right) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} kP\Big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big) + 2\sum_{k=1}^{n} kP\Big((X_n = k) \cap (W_n = 2)\Big) \\
&= 2nP\Big((X_n = n) \cap (W_n = 2)\Big) + \sum_{k=1}^{n-1} k\,P\Big((X_n = k) \cap (W_n = 1)\Big).
\end{aligned}$$

13. En utilisant les égalités trouvées dans les questions précédentes, on calcule :

$$\begin{aligned}
E(X_nW_n) &= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{2\dbinom{n}{k}}{3^n} \\
&= \frac{2}{3^n}\left(n + \sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n}{k}\right) \\
&= \frac{2}{3^n}\left(n + \sum_{k=1}^{n-1} n\binom{n-1}{k-1}\right) && \left(\text{D'après la formule : } \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}\right) \\
&= \frac{2n}{3^n}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}\right) && (\text{changement d'indice : } j = k-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2n}{3^n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-1-k} \\
&= \frac{2n}{3^n} \cdot 2^{n-1} && \text{(D'après la formule du binôme de Newton)} \\
&= n \left(\frac{2}{3}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Ainsi, $Cov(X_n, W_n) = E(X_n W_n) - E(X_n)E(W_n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - n \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$

14. On peut déjà dire que la covariance du couple est nulle, alors que les variables aléatoires X_n et Y_n ne sont pas indépendantes, ce qui illustre le fait que la nullité de la covariance d'un couple n'est pas une condition suffisante pour l'indépendance de deux variables aléatoires.
Pour comprendre pourquoi on obtient une covariance nulle, on peut aussi remarquer qu'une petite valeur valeur de W_n est favorisée par une répartition équitable des jetons dans les trois urnes, tandis que les grandes valeurs prises par W_n sont favorisées par des valeurs extrêmes prises par X_n (0 ou des valeurs proches de n). Les variables aléatoires X_n et W_n ne sont ni « alliées », ni « concurrentes »...

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entrainer très régulièrement à faire des calculs;

Dans l'ensemble, cette année, les copies sont bien présentées, propres, lisibles, les résultats sont mis en évidence et la numérotation est respectée. Cependant il reste un certain nombre de copies qui s'apparentent à un brouillon, avec des ratures peu propres et des passages illisibles. Il est clair que si le correcteur ne peut déchiffrer une partie d'une question, il n'accordera aucun point à cette question.
Les fautes d'orthographe et de grammaire sont bien trop fréquentes et rendent la lecture pénible. Même sur une copie de mathématiques, le respect des règles élémentaires d'orthographe et de grammaire est attendu.
Etonnament cette année, les parenthèses sont souvent omises. Les calculs deviennent alors incorrects. Cet oubli qui peut sembler anodin est au final lourd de conséquences sur l'appréciation de la copie.
Un certain manque de rigueur apparaît assez souvent dans les rédactions des raisonnements et dans l'utilisation des notations en particulier dans la notation de la dérivée partielle ou dans l'utilisation abusive d'abréviations. Ces dernières sont à utiliser avec parcimonie.
Les questions d'informatique sont peu traitées et quand elles le sont trop souvent fausses.

Avec une moyenne de 11,4 et un écart-type de 5,58, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Les probabilités semblent être un thème qui n'a pas les faveurs des candidats : l'exercice 3 de probabilités fut peu ou très partiellement traité.
Les opérations sur les puissances posent de nombreux problèmes et ne sont clairement pas maîtrisées.

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre linéaire, permettait de vérifier les acquis des candidats sur les notions fondamentales d'algèbre du programme de première et deuxième année. Dans une première partie, est étudiée une matrice élément des deux ensembles considérés et sa réduction. La deuxième partie porte sur la puissance de matrices. Enfin la dernière partie détermine l'expression générale du terme d'une suite de vecteurs. Cet exercice a été abordé par la quasi-intégralité des candidats, notamment grâce à sa position en début du sujet. L'erreur d'énoncé de la question 6(a) n'a apparemment pas gêné les candidats qui ont peu abordé cette question et ont traité les suivantes.

Partie I

1. On relève de nombreuses confusions sur la nature des objets manipulés, en particulier entre les ensembles et les matrices comme « $F = aI + bJ$ » ou « F est une base de dimension 2 de F » . La notation Vect n'est pas toujours bien comprise, et certains pensent qu'il est indispensable de prouver qu'un espace vectoriel engendré par une partie est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel ambiant.
2. Beaucoup ont pensé que G est un sous-espace vectoriel et un certain nombre pense même l'avoir démontré. Très peu de candidats ont eu l'idée d'exhiber un contre-exemple pour justifier que G n'est pas un sous-espace vectoriel. Le développement du carré est parfois hasardeux et en général la non-commutativité des matrices n'est pas prise en compte.
   Par ailleurs, il n'est pas suffisant d'affirmer qu'en général ou parfois $(\lambda M + N)^2 \neq \lambda M + N$: un contre-exemple explicite est nécessaire.
3. (a) Cette question n'a pas toujours été correctement traitée par les candidats. En particulier pour justifier que $A \in F$, certains donnent les coefficients $a = 2$ et $b = -1$; puis pour montrer que $A \in G$, et donc prouver que $A^2 = A$ la gestion du coefficient $\frac{1}{3}$ est difficile et les calculs sont parfois forcés pour arriver au résultat.
   Les produits matriciels sont parfois illisibles : présentation anarchique et positionnement farfelu des matrices.
   Plusieurs candidats affirment que « puisque F et G contiennent des matrices carrées d'ordre 3, toute matrice carrée d'ordre 3 appartient à F et à G » .
   Pour certains candidats les matrices de F sont les matrices symétriques.

   (b) Les candidats en général savent parfaitement ce qui est attendu d'eux, mais des confusions apparaissent. Par exemple, on relève un mélange des articles : ici seul **un** polynôme annulateur est demandé et non **le** polynôme annulateur (rappelons qu'il n'y pas unicité d'un tel polynôme). Il est attendu des candidats qu'ils distinguent une équation d'un polynôme : ainsi la réponse « $P(X) = 0$ » n'est pas satisfaisante.

   (c) Les concepteurs du sujet attendaient des candidats qu'ils utilisent la question précédente et pensent à justifier correctement que les racines du polynôme annulateur $X^2 - X$ sont aussi ici des valeurs propres de A.

Cependant, certains candidats ont perdu beaucoup de temps à déterminer directement les valeurs propres par une résolution de système, résolution qui aboutit rarement.
Parmi ceux qui ont déterminé les racines du polynôme, beaucoup ont déterminé le discriminant, c'est regrettable pour un polynôme qui se factorise aussi facilement et quand les calculs effectués aboutissent à des résultats absurdes.
Par la suite, de très nombreux candidats se lancent dans la résolution de système pour déterminer les vecteurs propres. Ces résolutions sont très longues, fastidieuses et aboutissent très souvent à des vecteurs propres nuls sans réaction des candidats. Il est bien dommage de ne pas prendre le temps d'expliciter la matrice $A - I$ et de remarquer que toutes ses colonnes sont égales, donnant ainsi directement son noyau.
Il semble difficile d'obtenir une base d'un sous-espace vectoriel de dimension 2, même après une résolution correcte du système.
Certaines confusions apparaissent entre les différents énoncés du cours, on peut parfois lire des affirmations telles que « A est symétrique donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale ».

(d) En général cette question est bien traitée.
Cependant, certaines confusions apparaissent dans quelques copies : « la somme des dimensions des sous-espaces propres est $\dim(\mathscr{M}_3(\mathbb{R}))$ (ou $\dim(A)$) ».
Rappelons à cet effet que les seuls objets mathématiques ayant une *dimension* sont les espaces vectoriels. En particulier, une matrice n'a pas de dimension. De plus, les candidats doivent bien différencier $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
En général, la distinction entre inversibilité et diagonalisation a été bien faite. Quelques incompréhensions restent : « A est triangulaire » ou « A est symétrique donc inversible » ou encore « A symétrique donc on lit les valeurs propres sur sa diagonale » ou « il n'y a pas de 0 sur la diagonale donc A est inversible » ou enfin « 0 est valeur propre de A donc A est (ou n'est pas – en fonction des copies) diagonalisable » .

Partie II

4. (a) Cette question est en général bien traitée.
(b) En général seule la vérification que les 4 matrices données sont dans l'intersection est faite. Mais elle n'est pas suffisante pour prouver l'égalité.
Quand la résolution du système est entamée, elle reste partielle. La gestion des équivalences est assez problématique.

5. Rares sont les candidats à avoir tous les points à cette question. Les correcteurs attendaient de voir correctement la liberté de la famille et l'égalité entre le cardinal de cette dernière et la dimension de l'espace vectoriel. Soit les candidats justifient correctement la liberté mais ratent la conclusion en sortant de nulle part le caractère générateur de la famille, soit ils voient que l'on peut utiliser un argument de dimension mais ratent l'étude de la liberté.
Une attention particulière est apportée aux copies confondant « dimension » au lieu de « cardinal » .

Plusieurs candidats calculent (plus ou moins bien) la matrice B et n'en font strictement rien. Mais le plus souvent, le raisonnement se tient malgré les nombreuses fautes dans le calcul de B.

6. (a) Cette question comportait une regrettable erreur dans son énoncé. Les points de cette question ont donc été neutralisés, et donnés à tous les candidats qui avaient abordé la partie II de l'Exercice 1 (et qui avaient donc pu être potentiellement gênés par cette question), qu'ils aient écrit quelque chose ou non sur leur copie à cette question ; on pouvait supposer que les candidats ayant traité la question 5 et les questions suivantes avaient sans doute perdu du temps au brouillon pour cette question 6(a).
Les points ont cependant été retirés aux candidats malhonnêtes qui ont forcé leurs calculs pour obtenir le résultat incorrect indiqué par l'énoncé. Nous rappelons que nous préférons valoriser des candidats qui signalent sur leur copie une erreur manifeste du sujet lorsqu'ils la constatent, ou qui admettent une question qu'ils n'arrivent pas à achever, ou bien encore ceux qui mentionnent qu'une erreur dans leurs calculs leur échappe ; à l'inverse, nous sanctionnons systématiquement les candidats qui maquillent des calculs faux, signe d'une malhonnêteté intellectuelle de leur part.

   (b) Cette question calculatoire n'a pas eu le succès attendu.
Beaucoup d'erreurs sont dues à un mauvais calcul de B. La gestion du $\dfrac{1}{3}$ et des signes $-$ a posé des difficultés dans tous les calculs matriciels.
Trop peu de candidats pensent à exploiter l'information : $A^2 = A$.

   (c) Un raisonnement par récurrence est attendu ici et l'hérédité a rarement été bien menée On relève quelques rares tentatives par la formule du binôme, souvent inabouties, car la formule du binôme est souvent mal connue.

7. (a) Le contraire de « $a \neq 0$ et $b \neq 0$ » n'est pas « $a = 0$ et $b = 0$ »! Peu de tentatives sont logiquement cohérentes, l'équivalence n'a jamais été trouvée.

   (b) Cette question est rarement abordée. Ceux qui ont essayé l'ont fait le plus souvent par récurrence, sans réussite, souvent à cause d'une confusion entre $M^{-(n+1)}$ et M^{-n+1}, puis parce que l'expression de M^{-1} n'est pas trouvée.
Très peu de candidats ont eu l'idée de calculer un produit. Cette méthode convenait parfaitement et était la plus rapide.

Partie III

8. Beaucoup d'erreurs dans le calcul de $I - T$ sont remarquées. L'expression en fonction de A et B est rarement trouvée (bien sûr, une expression cohérente avec les valeurs de α et β donnée à la question $6(a)$ était acceptée).

9. Cette question est peu traitée.
Quelques candidats se sont lancés dans la méthode du pivot.
Les rares candidats qui ont traité cette question ignorent parfois ce qu'est un réel élevé à la puissance -1 : on lit trop souvent que $(-4)^{-1} = +4$.

10. La question 9 est rarement exploitée. Le calcul de L s'est fait par résolution d'un système et a tout de même pu être abouti correctement par une partie des candidats.

11. Certains candidats cherchent à prouver la première égalité par récurrence. Le principe de récurrence n'est peut-être pas tout à fait compris : pour effectuer une récurrence, il faut une relation liant X_{n+1} à X_n.
12. Cette question est très peu traitée, en général seule l'expression de T^n est donnée, et non celle de X_n.

Exercice 2

Cet exercice d'analyse est divisé en trois parties. La première étudie une fonction numérique. La seconde partie étudie une suite récurrente et la troisième partie les extrema d'une fonction à deux variables.

Partie I : Étude de la fonction g

1. Les résolutions proposées sont assez décevantes : la limite en 0 est très rarement réussie à cause d'un problème de signe. Par contre, la limite en $+\infty$ est en général bien traitée.
   De nombreux candidats se lancent dans des recherches de fonctions équivalentes, souvent de façon erronée, au lieu de chercher « simplement » les limites.
   Les propriétés de l'exponentielle sont mal maîtrisées : on lit souvent que « $e^{a\times b} = e^a \times e^b$ » et les limites usuelles en 0 de $\ln(x)$ et de $1/x$ sont parfois méconnues.
2. (a) La rédaction est assez souvent négligée pour cette question simple.
   De nombreux candidats confondent visiblement les notions « dérivable » et « de classe $\mathscr{C}^1$ ».
   Le mot « strictement » n'est parfois pas lu par les candidats. On attendait bien une inégalité stricte ici.
   (b) Le raisonnement à mener semble connu pour l'ensemble des candidats, mais il n'est pas toujours mené de manière rigoureuse. Ainsi, les hypothèses sont rarement vérifiées entièrement : beaucoup ne vérifient pas que $0 \in \mathbb{R}$ ou ne mentionnent pas la stricte croissance de h.
   L'encadrement de α n'est pas toujours bien justifié.
   Il faut prendre garde à la cohérence. Certains candidats affirment que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$, donc que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, puis concluent en affirmant que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution.
   Il existerait, à en croire plusieurs candidats, des fonctions « strictement continues » .
   (c) Nous constatons de très nombreux oublis de parenthèses !
   (d) Beaucoup de candidats concluent que g est croissante, en confondant « croissance de h » et « positivité de h » .
3. Cette question est très peu traitée.

Partie II : Étude d'une suite récurrente

4. Quelques candidats mènent correctement cette récurrence en particulier en prouvant correctement l'existence de u_n. Mais en majorité, l'existence de u_n est négligée ou omise. Trop de candidats concluent l'hérédité par « croissance de g ». Il est regrettable que certains candidats étudient correctement les variations de g en 2.(d) et considèrent cependant que g est croissante dans cette question, ou considèrent une valeur pour $g(0)$.

5. Cette question est souvent passée par les candidats.
   Majoritairement les programmes proposés calculent u_n, parfois assez correctement, mais qui ne répondent pas exactement à la question posée.
   La syntaxe `function` n'est pas du tout maîtrisée, de même pour la manipulation des listes.
6. (a) Cette question est traitée de manière assez inégale : certains font un tableau de signe et concluent ainsi directement et rapidement, d'autres (assez nombreux) se lancent dans une étude de fonctions longue, fastidieuse et qui n'aboutit pas.
   Le signe du logarithme pose beaucoup de problèmes.De nombreuses conclusions sont expéditives et fausses.
   Certains candidats ne connaissent visiblement que les nombres entiers : « $x > 0$ donc $x \geqslant 1$ » .
   (b) Cette question est peu traitée, sauf dans quelques très bonnes copies. Des tentatives non abouties par étude d'une fonction sont à noter.
   (c) Le lien entre cette question et les précédentes n'est pas toujours repéré par les candidats ; pourtant, l'expression « En déduire » aurait dû les y inciter.
   La positivité de x est trop peu clairement évoquée lors de la multiplication par x dans l'inégalité.
   Beaucoup font appel au théorème de la bijection, appliqué à g, pour résoudre l'équation.
   Des simplifications abusives apparaisse aussi « $(x-1)\ln(x) = 0 \iff x - 1 = 0$ » .
7. Cette question est assez bien traitée.
   Cependant il n'est pas nécessaire ici d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ au vu des questions précédentes.
8. (a) Cette question un peu technique est rarement bien traitée.
   Beaucoup de candidats utilisent $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Longrightarrow g(x) \in \left[g\left(\frac{1}{2}\right), g(1)\right]$ alors que g n'est pas monotone sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Parmi les candidats qui utilisent la « monotonie » de g sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, aucun ne s'étonne que $g\left(\frac{1}{2}\right) = g(1)$
   (b) Le théorème de la limite monotone semble le plus souvent connu mais la continuité de g est trop peu évoquée ; certains ne voient pas le lien avec la question 6(c).
   La rédaction est trop souvent confuse : la mise en œuvre du théorème de la limite monotone est entremêlée avec celle du théorème du point fixe.
9. (a) Cette question est bien mieux réussie que la 8.(a) puisqu'ici la fonction est bien strictement croissante sur l'intervalle à considérer, mais la stricte croissance de g est citée plus par automatisme que par compréhension précise de son intérêt (ici cela fonctionne, alors qu'en 8.(a) cela ne fonctionnait pas).
   (b) Très peu voient le raisonnement par l'absurde ; ceux qui ont tenté concluent souvent maladroitement « $u_n > 1$ donc (u_n) ne peut pas converger vers 1 » .
   Beaucoup de confusions entre la limite de la suite (u_n) et la limite en $+\infty$ de la fonction g.
10. Cette question est très peu abordée. Et quand elle l'est, beaucoup de grosses fautes : la suite serait bornée par $\frac{1}{2}$ et 1, et aurait les mêmes variations que g sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Partie III : Extrema de la fonction f

11. On relève de nombreuses erreurs dans l'emploi de termes : ainsi la fonction f n'est pas polynomiale, ni dérivable.
Il est dommage que la différence entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ soit si peu perçue !
12. Comme en 2.(c), de très nombreux oublis de parenthèses !
On signale un effort louable d'expliquer les calculs, mais la notation $'$ est fausse pour dériver dès lors qu'il y a plusieurs variables.
13. La définition et la méthode de recherche des points critiques semblent connues. Beaucoup négligent cependant de préciser que $f(x, y)$ n'est pas nul pour conclure la résolution du système.
14. La plupart des candidats a renoncé à mener les calculs.
Certains arrivent à avoir les bonnes dérivées partielles secondes mais vont ensuite trop vite pour donner la hessienne en $(1, 1)$, sans donner a minima la valeur de $f(1, 1)$.
15. Ceux qui sont arrivés jusque-là connaissent en général la propriété à énoncer. La rédaction pour la recherche des valeurs propres de H laisse cependant souvent à désirer, le trinôme issu du déterminant de $H - \lambda I$ étant souvent donné sans lien explicite avec les valeurs propres de H, l'expression « valeurs propres » n'apparaissant même parfois jamais.
On lit beaucoup de réponses farfelues telles que : « H est symétrique donc ses valeurs propres sont sur sa diagonale » ; plusieurs candidats trouvent que 0 est valeur propre de H mais ne savent pas qu'en ce cas, le cours ne permet pas de conclure ; plusieurs candidats trouvent que 1 est l'unique valeur propre mais ne font pas le rapprochement avec le cours d'Algèbre, qui devrait rendre l'erreur repérable.
Quelques utilisations d'une « formule magique » avec déterminant et trace (hors programme) ont quasiment toujours abouti à des erreurs.
De même, les notations de Monge et la conclusion avec le signe de $rt - s^2$ ne sont plus acceptées.
16. Cette question est peu traitée et quand elle l'est, elle est assez mal traitée. Le lien entre extremum global et extremum local n'est en général pas compris ; de même, il ne faut pas confondre « extremum en a » et « extremum sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ » .

Exercice 3

Cet exercice est un exercice de probabilité discrète autour de la composition de trois urnes. Il permet de travailler sur des variables aléatoires discrètes à partir de l'étude précise d'événements. La deuxième partie de cet exercice porte plus sur la corrélation entre deux variables aléatoires discrètes.

Partie I

1. (a) Des justifications trop souvent incomplètes ou approximatives : le mot-clé « nombre de succès » est vraiment rare dans les copies, de même que l'indépendance des épreuves. Beaucoup de candidats pensent qu'il est nécessaire de donner l'espérance et la variance de la loi binomiale.

Les notions d'événement et de variable aléatoire sont confondues : « X_n est l'événement qui compte le nombre de jetons dans l'urne U_1. »

(b) En général, cette question fut bien traitée. Certains, plutôt que d'utiliser la loi binomiale, trouvent les bonnes réponses en évoquant une succession d'événements indépendants.
Beaucoup de candidats ont compris la consigne « expliciter » comme une demande d'expliquer avec une phrases les événements, au lieu de calculer les probabilités.
Des confusions entre les événements et leur probabilité apparaissent.

(c) Une confusion est assez fréquente, celle entre les urnes et les variables qui leur sont associées : « Si les urnes Y_n et Z_n ne contiennent aucun jeton, alors l'urne X_n contient tous les jetons ».

(d) Les sommes ou soustractions d'évènements sont évidemment peu convaincantes et montrent le manque de maîtrise de la nature des objets mathématiques.
Beaucoup de candidats ont écrit des réunions et intersections très compliquées : ces expressions, parfois correctes, permettraient d'obtenir miraculeusement le résultat de la question suivante.

(e) Cette question est inégalement traitée : soit très bien, soit de manière assez farfelue.
Pour certains, les réunions sont toujours constituées d'événements deux à deux incompatibles.
La formule du crible est rarement apparue.
On relève beaucoup de passages en force pour aboutir à l'expression demandée. Plusieurs candidats prétendent même que les variables X_n, Y_n et Z_n sont indépendantes.
Des intersections ou des réunions de probabilités apparaissent encore. Rappelons que seules des intersections ou des réunions d'ensembles ou d'événements sont possibles.

2. Cette question est rarement traitée, mais quelques candidats ont correctement évoqué le théorème de la limite monotone avec la décroissance de la suite d'événements.
Quelques candidats « sentent » confusément que $P(V)$ doit être la limite de $P(V_n)$, mais le plus souvent, l'événement V serait la réunion des V_n (forcément incompatibles !).

3. (a) Cette question est peu traitée et peu réussie.
Le renseignement de la commande `while` est le plus souvent faux, avec cependant une idée correcte de ce qu'il fallait faire. Le retour `t=n` est souvent présent, par contre le deuxième trou a été rarement compris.
Beaucoup oublient le double égal « == »dans la condition, et peu de candidats savent bien noter le « ou » ; certains se contentent même de séparer les expressions booléennes par des virgules ou des points-virgules.
Il était demandé de **compléter** la fonction et non de la **recopier** : le recopiage est inutile et extrêmement agaçant lorsque le correcteur constate que les 3 endroits à compléter sont restés vides.

(b) Cette question est très peu traitée, et avec peu de succès pour ceux qui ont tenté.

4. Les intervalles $[\![3, n]\!]$ et $[\![3, +\infty]\!]$ sont souvent confondus.

5. Une question peu traitée et de manière assez inégale : souvent maladroite ou erronée. Une explication cohérente en français apparaît toutefois de temps en temps, même si celle-ci ne suffisait pas ; on cite cependant quelques réussites par une belle décomposition $V_{n-1} = V_n \cup [T = n]$.

6. La définition de l'espérance est souvent correcte, puis les calculs menés trop maladroitement. La justification de la convergence des séries est souvent absente.
   Par manque de rigueur, plusieurs candidats ont affirmé reconnaître une somme télescopique.

Partie II

Cette partie a été abordée par très peu de candidats.

7. (a) De très rares candidats ont trouvé la loi du couple. Ceux qui ont tenté savent ce qu'il faut faire mais n'ont pas su interpréter les intersections pour calculer correctement les probabilités.
   (b) Cette question est peu abordée car la loi du couple n'a pas été trouvée. Certains arrivent à trouver la loi de W_2 de façon correcte sans utiliser la loi du couple, mais ils ne sont pas nombreux.
   (c) Sans avoir trouvé la loi du couple, des candidats prennent la peine de rappeler l'expression de la covariance.
   La formule de Kœnig-Huygens est assez bien restituée.
   (d) Ceux qui n'ont pas répondu à la question précédente tentent leur chance avec « si la covariance est nulle, alors les variables sont indépendantes ».
8. Cette question est assez bien faite par les rares candidats qui l'ont traitée.
9. (a) Cette question est rarement abordée, encore plus rarement réussie.
   (b) Cette question est un peu plus souvent abordée que la précédente, et en général correctement.
   (c) Cette question est très rarement abordée.
10. Cette question est rarement abordée. Une justification précise de la première égalité est attendue, mais la valeur de la probabilité avec une justification sommaire est acceptée pour la deuxième partie.
11. Cette question est très rarement traitée. Un certain manque de rigueur apparaît chez les rares candidats à l'avoir traitée : remplacer k par n dans la formule valable pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
12. Cette question est très rarement traitée.
13. Cette question est très rarement traitée.
14. Personne n'a abordé cette question.