2020

CORRIGÉ

MATHEMATIQUES

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE ECONOMIQUE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A : Etude du cas où $a = 1$.

1. On obtient $\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$, $M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{(M - I_3)^2 = 0}$.

2. La question précédente fournit un polynôme annulateur de M : le polynôme $P(X) = (X-1)^2$. Ainsi, le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines de P. Le polynôme P admet le réel 1 comme unique racine, donc $\boxed{\text{la seule valeur propre possible de } M \text{ est } 1}$.

3. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de M, $\boxed{M \text{ est donc bien inversible}}$.
Supposons que M est diagonalisable. Dans ce cas, il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. Or, 1 étant l'unique valeur possible de M, D est la matrice identité. Donc $M = PI_3P^{-1} = I_3$.
Ceci est absurde, donc $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

Partie B : Étude du cas où $a = 0$.

4. Avec $a = 0$, on obtient : $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$$MX = X \Leftrightarrow (M - I_3)X = 0 \Leftrightarrow x - y - z = 0$$

Donc $Ker(M - I_3) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \{0\}$. Ainsi, $\boxed{1 \text{ est bien valeur propre de } M}$.

De plus, $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(M)}$ puisque ces deux vecteurs sont non colinéaires, et $\boxed{\dim(E_1(M)) = 2}$.

5. En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M, on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc la famille (C_1, C_2, C_3) est liée, donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

6. D'après les questions précédentes, 0 et 1 sont valeurs propres de M.
De plus, $E_1(M)$ est de dimension 2, chaque sous-espace propre est de dimension supérieure ou égale à 1, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de M ne peut pas excéder 3.
Donc $E_0(M)$ est de dimension 1, et M ne peut pas admettre d'autre valeur propre.
Conclusion : $\boxed{\text{La matrice } M \text{ admet exactement deux valeurs propres : 0 et 1}}$, on a :
$\boxed{\dim(E_0(M)) = 1 \text{ et } \dim(E_1(M)) = 2}$, et comme $\dim(E_0(M)) + \dim(E_1(M)) = 3$, $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$.

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et de 1.

7. Montrons d'abord que la famille (u, v, w) est libre.

   Soient a, b, c trois réels tels que $au + bv + cw = 0$. On a alors : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b=0 \end{cases}$, donc $a = b = c = 0$.

   Donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre, et $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, donc $\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

8. On obtient $\boxed{f(u) = (a, a, a) = au}$ et $\boxed{f(v) = (1, 0, 1) = v}$

9. On obtient : $\boxed{f(w) = (a + 1, 1, a) = av + w.}$

10. D'après les questions précédentes : on obtient : $\boxed{T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

11. La matrice T est triangulaire, donc ses valeurs propres sont les réels situés sur sa diagonale.
    Comme $a \neq 1$, donc T a deux valeurs propres distinctes : 1 et a.
    On obtient facilement que l'espace propre associé à la valeur propre a pour T est engendré par le vecteur $(1, 0, 0)$; et que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est engendré par le vecteur $(0, 1, 0)$.
    Ainsi, chacun des sous-espaces propres de T est de dimension 1.
    De plus, M et T sont semblables et représentent donc un même endomorphisme dans des bases différentes.
    En particulier, M a les mêmes valeurs propres que T, et les sous-espaces propres sont de même dimension.
    $\dim(E_a(M)) + \dim(E_1(M)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$, donc $\boxed{\text{la matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

EXERCICE 2

Partie A : Étude de la fonction f_n.

1. La fonction : $t \mapsto \dfrac{t^{2n} - 1}{t + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, comme quotient de telles fonctions, dont le dénominateur ne s'annule pas. On note H une de ses primitives, qui est donc C^1 sur $\mathbb{R}_+$. On a alors :

   $$\forall x \geqslant 0, \quad f_n(x) = H(x) - H(0).$$

   Ainsi, f_n est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (somme d'une fonction C^1 et d'une constante) et :

   $$\forall x \geqslant 0, \quad f_n'(x) = H'(x) - 0 = \boxed{\frac{x^{2n} - 1}{x + 1}.}$$

2. La fonction f_n' est négative sur $[0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.
   Donc $\boxed{f_n \text{ est décroissante sur } [0, 1] \text{ et croissante sur } [1, +\infty[}$.

3. La fonction f_n' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, en tant que quotient de fonctions de classe C^1, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi f_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, et :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f_n''(x) = \frac{2nx^{2n-1}(x+1) - (x^{2n}-1)}{(x+1)^2} = \frac{(2n-1)x^{2n} + nx^{2n-1} + 1}{(x+1)^2}.$$

Le numérateur est une somme de termes positifs, et le dénominateur est un carré, donc f_n'' est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc $\boxed{f_n \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+}$.

4. (a) La fonction : $h : u \mapsto u^n$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, et :

$$\forall u \geqslant 1, \quad h'(u) = nu^{n-1} \geqslant n.$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée à la fonction h entre 1 et t^2 :

$$h(t^2) - h(1) \geqslant n(t^2 - 1),$$

ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\forall t \geqslant 1, \ t^{2n} - 1 \geqslant n(t^2 - 1)}.$$

(b) Partons de l'inégalité précédente, pour tout $t \geqslant 1$. On divise des deux côtés par le nombre positif $t+1$ (strictement positif), et après simplification par le facteur $t+1$, on obtient :

$$\forall t \geqslant 1, \ \frac{t^{2n}-1}{t+1} \geqslant n(t-1).$$

D'où, par positivité de l'intégrale, $(1 \leqslant x)$:

$$\forall x \geqslant 1, \ f_n(x) = f_n(1) + \int_1^x \frac{t^{2n}-1}{t+1} \mathrm{d}t \geqslant f_n(1) + n \int_1^x (t-1) \mathrm{d}t = \boxed{f_n(1) + \frac{n}{2}(x-1)^2}.$$

(c) Par comparaison, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)^2 = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty}$.

5. On a directement que $f_n(0) = 0$.
De plus, f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$, (en effet $\forall x \in [0, 1[, f_n'(x) < 0$).
Ainsi, on a nécessairement $f_n(1) < f_n(0) = 0$.

6. D'après la question précédente, f_n est strictement négative sur $]0, 1]$, donc l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
Sur $]1, +\infty[$, la fonction f_n est continue et strictement croissante (car $\forall x > 1, f_n'(x) > 0$), donc réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers $]f_n(1), +\infty[$. Comme $0 \in]f_n(1), +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle.
Conclusion : $\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution strictement positive}}$, et cette solution est strictement supérieure à 1.

Partie B : Étude d'une suite implicite.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \quad = \int_0^x \frac{t^{2n+2} - t^{2n}}{t+1} dt = \int_0^x t^{2n}(t-1)dt = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)}.$$

8. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$,, on a : $\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} \geqslant 0$ et $x^{2n+1} \geqslant 0$.

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1},\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \geqslant 0$, donc $\boxed{f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)}$.

   (b) D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$.
   On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente à x_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant f_n(x_n).$$

   Et par construction de x_n, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x_n) = 0$.
   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant 0}$.

   (c) Réécrivons l'inégalité précédente, en tenant du compte du fait que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_{n+1}(x_n) \geqslant f_{n+1}(x_{n+1}).$$

   Par ailleurs, les réels x_n et x_{n+1} sont supérieurs à 1, et sur $[1, +\infty[$, la fonction f_{n+1} est strictement croissante. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geqslant x_{n+1}.$$

   Donc la suite (x_n) est décroissante. De plus, elle est minorée par 1.
   Ainsi, $\boxed{(x_n) \text{ converge vers un réel supérieur ou égal à 1.}}$

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant t^{2n} \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant t^{2n} - 1 \leqslant 0$.
   On divise par le réel $t+1$, strictement positif :

$$\forall t \in [0,1],\ -\frac{1}{t+1} \leqslant \frac{t^{2n}-1}{t+1} \leqslant 0.$$

   Intégrons membre à membre cet encadrement, sur l'intervalle $[0,1]$, en remarquant que les bornes d'intégration sont bien dans l'ordre croissant, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(2) \leqslant f_n(1) \leqslant 0}$$

   (b) On applique l'inégalité de la question 4(b) avec $x = x_n$ (ce qui est licite, puisque $x_n \geqslant 1$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x_n) \geqslant f_n(1) + \frac{n}{2}(x_n - 1)^2.$$

Et comme $f_n(x_n) = 0$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, -f_n(1) \geqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \geqslant 0.$$

De plus, d'après la question précédente : $-f_n(1) \leqslant \ln 2$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{n}{2}(x_n - 1)^2 \leqslant \ln 2.$$

On multiplie par le réel $\frac{2}{n}$, strictement positif :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant (x_n - 1)^2 \leqslant \frac{2\ln 2}{n},$$

puis, sachant que $x_n - 1 \geqslant 0$, on compose par la fonction racine, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n - 1 \leqslant \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}}.$$

Par encadrement, on peut conclure que $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ converge vers } 1.}$

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables.

10. On a : $G_n = f_n \circ u \times f_n \circ v$, où $u : (x, y) \mapsto x$ et $v : (x, y) \mapsto y$.
La fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et f_n est de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, $f_n \circ u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
De même, $f_n \circ v$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, donc par produit, la fonction G_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \left\{ \begin{array}{l} \partial_1(G_n)(x, y) = f_n'(x) f_n(y) \\ \partial_2(G_n)(x, y) = f_n(x) f_n'(y) \end{array} \right.}$

11. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \nabla(G_n)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_n'(x) f_n(y) = 0 \\ f_n(x) f_n'(y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \text{ ou } y = x_n \\ x = x_n \text{ ou } y = 1 \end{array} \right.$

Comme $x_n \neq 1$, $\boxed{\text{la fonction } G_n \text{ admet deux points critiques : } (1, 1) \text{ et } (x_n, x_n).}$

12. Calculons la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1, 1)$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \left\{ \begin{array}{l} \partial_{1,1}(G_n)(x, y) = f_n''(x) f_n(y) \\ \partial_{2,2}(G_n)(x, y) = f_n(x) f_n''(y) \\ \partial_{1,2}(G_n)(x, y) = f_n'(x) f_n'(y) \end{array} \right.$$

Ainsi, $\boxed{\nabla^2(G_n)(1, 1) = \begin{pmatrix} f_n(1) f_n''(1) & 0 \\ 0 & f_n(1) f_n''(1) \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\nabla^2(G_n)(x_n, x_n) = \begin{pmatrix} 0 & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & 0 \end{pmatrix}}$.

13. On sait que $x_n > 1$, donc $f_n'(x_n) > 0$. Ainsi, la matrice hessienne de G_n en (x_n, x_n) admet exactement deux valeurs propres : $f_n'(x_n)$ et $-f_n'(x_n)$. En effet,

$$\begin{pmatrix} -\lambda & (f_n'(x_n))^2 \\ (f_n'(x_n))^2 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \iff \lambda^2 - (f_n'(x_n))^4 = 0 \iff \lambda = \pm f_n'(x_n)$$

Ainsi, $\nabla^2(G_n)(x_n, x_n)$ a une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. Donc $\boxed{G_n \text{ n'admet pas d'extremum local en } (x_n, x_n).}$

14. La matrice hessienne de G_n en $(1,1)$ est diagonale : on lit donc ses valeurs propres sur sa diagonale : il n'y en a qu'une : $f_n(1) \times f_n''(1)$. Or, d'après l'étude établie précédemment, $f_n(1) < 0$ et $f_n''(1) > 0$, donc l'unique valeur propre de la matrice hessienne de G_n en $(1,1)$ est strictement négative.
On peut donc conclure que $\boxed{\text{la fonction } G_n \text{ admet un maximum local en } (1,1).}$

EXERCICE 3

1. Soit $a > 0$. L'intégrale $I_n(a)$ converge en tant qu'intégrale de Riemann ($n \geqslant 2 > 1$).
$\forall y \geqslant a$, $\displaystyle\int_a^y \frac{1}{t^n}dt = \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}\right]_a^y = -\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{y^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.
Donc $\boxed{\text{l'intégrale } I_n(a) \text{ converge bien et vaut } \dfrac{1}{(n-1)a^{n-1}}.}$

2. (a) La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, et continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en a.
De plus, f est nulle sur $]-\infty, a[$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
Et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = 3a^3 \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4}dt = 3a^3 \times I_4(a)$.
D'après la question précédente, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.
En conclusion : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$

(b) Pour tout réel x, en reprenant le calcul de la question 1, on a :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ 1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^3 & \text{si } x \geqslant a \end{cases}}$$

(c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge (absolument), c'est-à-dire si et seulement si $3a^3 \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt$ converge.
Or, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^3}dt = I_3(a)$ converge et vaut $\dfrac{1}{2a^2}$, donc $\boxed{X \text{ admet une espérance, et } E(X) = \dfrac{3}{2}a}$.

(d) De même, X admet un moment d'ordre 2, et (par théorème de transfert)

$$E(X^2) = \int_a^{+\infty} \frac{3a^3}{t^2} dt = 3a^3 \times I_2(a) = \frac{3a^3}{a} = 3a^2.$$

Donc $\boxed{X \text{ admet une variance}}$, et $V(X) = 3a^2 - \frac{9}{4}a^2 = \boxed{\frac{3}{4}a^2}$.

3. (a) On obtient : $\boxed{Y(\Omega) = [a, +\infty[.}$

(b) • Pour $x \leqslant a$, on a : $F_Y(x) = 0$.

• Pour $x > a$, on a : $F_Y(x) = P\left(\frac{a}{U^{1/3}} \leqslant x\right) = P\left(U^{1/3} \geqslant \frac{a}{x}\right) = 1 - P\left(U \leqslant \left(\frac{a}{x}\right)^3\right) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^3$.

Finalement, U et et X ont la même fonction de répartition, donc $\boxed{\text{suivent la même loi}}$.

(c)

```
function Y=simulX(a,m,n)
    U=rand(m,n)
    Y=a./U.^(1/3)
endfunction
```

4. (a) $P([X > 2a]) = 1 - F_X(2a) = 1 - 1 + \left(\frac{a}{2a}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{8}}$.

(b) $P_{[X>2a]}([X > 6a]) = \frac{P(X > 6a)}{P(X > 2a)} = 8 \times \frac{1}{6^3} = \boxed{\frac{1}{27}}$.

(c)

```
a=10
N=100000
s1=0
s2=0
X=simulX(a,1,N)
for k=1:N
    if X(k)>2*a then
        s1=s1+1
        if X(k)>6*a then
            s2=s2+1
        end
     end
end
if s1>0 then
     disp(s2/s1)
end
```

5. (a) Par linéarité de l'espérance, $E(V_n) = \dfrac{2}{3n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \dfrac{2}{3n} \times n \times \dfrac{3}{2}a = a.$

Donc $\boxed{V_n \text{ est un estimateur sans biais pour le paramètre } a.}$

(b) L'estimateur V_n est sans biais, donc son risque quadratique est égal à sa variance.

On a de plus, par propriété de la variance : $V(V_n) = \dfrac{4}{9n^2} V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$.

Et par indépendance des variables aléatoires X_k, on a : $V(V_n) = \dfrac{4}{9n^2} \times n \times \dfrac{3}{4}a^2 = \dfrac{a^2}{3n}$.

Donc $\boxed{\text{le risque quadratique de } V_n \text{ vaut bien } \dfrac{a^2}{3n}.}$

6. (a) On pose $W_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$. On a $W_n(\Omega) = [a, +\infty[$.
On note F_n la fonction de répartition de W_n.

- Pour $x \leqslant a$, on a : , $F_n(x) = 0$.
- Soit $x > a$. On a : $F_n(x) = P(W_n \leqslant x) = 1 - P(W_n > x) = 1 - P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [X_k > k]\right)$.

  Et par indépendance, on obtient que $F_n(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = 1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^{3n}$.

En conclusion, on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant a \\ 1 - \left(\dfrac{a}{x}\right)^{3n} & \text{si} \quad x > a \end{cases}.}$$

La fonction F_n est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en a.
Ainsi : $\boxed{W_n \text{ est bien une variable aléatoire à densité}}$

(b) En dérivant F_n en tout point différent de a, et en choisissant une valeur arbitraire en a, on obtient directement pour W_n une densité en la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \dfrac{3na^{3n}}{t^{3n+1}} & \text{si } t \geqslant a. \end{cases}}$$

(c) De même que pour X, la variable aléatoire W_n admet une espérance, et :

$$E(W_n) = \int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n}} dt = 3na^{3n} I_{3n}(a) = \frac{3n}{3n-1}a.$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance, $E\left(\dfrac{3n-1}{3n} W_n\right) = a$.

La variable aléatoire $\boxed{\dfrac{3n-1}{3n} W_n \text{ est un estimateur sans biais pour le paramètre } a}$.

(d) L'estimateur $\dfrac{3n-1}{3n}W_n$ est sans biais, donc son risque quadratique est égal à sa variance. Commençons par calculer le moment d'ordre 2 de W_n :

$$E(W_n^2) = \int_a^{+\infty} \frac{3na^{3n}}{t^{3n-1}}dt = 3na^{3n}I_{3n-1}(a) = \frac{3na^{3n}}{(3n-2)a^{3n-2}} = \frac{3n}{3n-2}a^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} V(W_n) &= \frac{3n}{3n-2}a^2 - \frac{9n^2}{(3n-1)^2}a^2 = 3na^2\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{3n}{(3n-1)^2}\right) \\ &= 3na^2 \times \frac{(3n-1)^2 - 3n(3n-2)}{(3n-2)(3n-1)^2} = \frac{3na^2}{(3n-2)(3n-1)^2}. \end{aligned}$$

Enfin, $r\left(\dfrac{3n-1}{3n}W_n\right) = V\left(\dfrac{3n-1}{3n}W_n\right) = \boxed{\dfrac{a^2}{3n(3n-2)}}$.

7. (a)

```
function V=simulV(a,m,n)
    X=simulX(a,m,n)
    V=zeros(1,m)
    for k= 1:m
        V(k)= mean(X(k,:))*2/3
    end
endfunction
```

(b) Les croix droites du graphique semblent représenter les valeurs prises par $\lambda_n W_n$. En effet, elles sont plus regroupées autour de la valeur a à estimer que les croix obliques, ce qui correspond au fait que le risque quadratique de $\lambda_n W_n$ est plus faible que celui de V_n.

On complète donc le script comme suit :

```
W=simulW(5,20,100)
V=simulV(5,20,100)
plot2d(W,style=-1)
plot2d(V,style=-2)
```

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Avec une moyenne de 11,00 et un écart-type de 5,62, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée.
  En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière. De même, quand un candidat change exercice, il est nécessaire de le mentionner. Nous conseillons aux futurs candidats de numéroter notamment toutes les pages sur lesquelles ils ont écrit quelque chose et de les numéroter 1/23, 2/23, 3/23, etc.
- Il n'est pas nécessaire de recopier l'énoncé en totalité sur sa copie avant d'attaquer chaque question. Cela représente une perte de temps considérable, et nous conseillons aux candidats de plutôt soigner les conclusions de leur réponse et de faire une introduction brève.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entrainer très régulièrement à faire des calculs.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre linéaire, permettait de vérifier les acquis des candidats sur les notions fondamentales d'algèbre du programme de première et deuxième année, à savoir le calcul matriciel, les applications linéaires et leur représentation matricielle. Il a été abordé par la quasi-intégralité des candidats, notamment grâce à sa position en début du sujet. Volontairement progressif, il était rédigé de manière à ce que les candidats comprennent les méthodes attendues dans chaque question parmi les choix possibles.

En particulier, le sujet essaie au maximum d'éviter aux candidats les calculs longs et pénibles, et a permis de valoriser les étudiants se concentrant sur les raisonnements et les démonstrations, plutôt que les calculs spontanés laborieux. Nous ne pouvons qu'encourager les futurs candidats à essayer d'aborder les exercices d'algèbre dans cette épreuve dans cette optique.

Partie A - Étude du cas où $a = 1$

1. Cette première question élémentaire est en général bien traitée.
   Seules de rares erreurs ont lieu sur le calcul de $(M - I)^2$.

2. La méthode mise en jeu dans cette question a souvent été bien comprise, mais a généralement été mal rédigée par les candidats.

   En général, la relation d'inclusion entre l'ensemble des racines du polynôme annulateur et spectre de M est bien connue. Cependant, si cette phrase est souvent bien énoncée en français sur la copie, elle est parfois ensuite traduite par $\{1\} \subset Sp(M)$ ou par $\{1\} = Sp(M)$. Le sens de l'inclusion entre les deux ensembles n'est donc pas très clair pour les candidats.

   Rappelons aux futurs candidats qu'un polynôme annulateur de M n'est pas unique (il faut donc éviter de s'y référer comme *le* polynôme annulateur de la matrice M). De plus, la notation « $(X - 1)^2 = 0$ » n'est pas un polynôme annulateur, « $(M - I)^2$ » non plus ; ce genre de confusions témoigne chez les candidats d'une mauvaise assimilation de la nature même des objets qu'ils manipulent.

   Un nombre trop important de candidats cherche maladroitement la racine de $(X - 1)^2$ en développant puis en calculant le discriminant Δ du polynôme.

   Beaucoup de candidats prouvent à cette question que 1 est effectivement une valeur propre. Rappelons donc encore une fois qu'il faut bien lire l'intégralité de l'énoncé des questions et ne pas faire de hors sujet.

3. Cette question pourtant classique a été peu correctement traitée. Elle a donné lieu à de nombreux raisonnements fantaisistes ou erronés.
   Ce n'est pas parce qu'une matrice n'admet qu'une seule valeur propre qu'elle est non diagonalisable ; ce n'est pas non plus car elle n'admet pas trois valeurs propres distinctes. Il y a un raisonnement plus abouti à effectuer en utilisant la condition nécessaire et suffisante au programme.

   De même pour l'inversibilité de la matrice M, on relève des confusions très grossières. Ce n'est pas parce qu'une matrice a un coefficient diagonal nul qu'elle n'est pas inversible ; tout autant, toute matrice triangulaire n'est pas inversible.

   Il n'y a encore moins de lien logique entre inversibilité (ou non) et diagonalisabilité (ou non). Les questions posées ici dans l'exercice n'étaient pas reliées, à part qu'elles utilisaient toutes les deux les valeurs propres (éventuelles) de la matrice M.

Partie B : Étude du cas où $a = 0$

4. Cette question est assez bien faite dans l'ensemble. Parfois des candidats oublient de mentionner que 1 est bien valeur propre, ou bien que les vecteurs obtenus ne sont pas colinéaires pour donner la dimension du sous-espace propre.
   La principale erreur, faite par les candidats qui pensent bien à prouver que 1 est une valeur propre, est de confondre $E_1(M) \neq \emptyset$ et $E_1(M) \neq \{0\}$.

5. Ici, les candidats se lancent trop souvent dans des résolutions par système ou par pivot de Gauss, alors qu'une simple lecture de la matrice permet de conclure ; il n'est pas demandé par exemple de déterminer

le noyau de M à cette question. Beaucoup de candidats prouvent ici que 0 est valeur propre de M, anticipant ainsi sur la question suivante ; c'est un peu dommage car on ressent plus ici un automatisme de calcul, plus qu'une véritable lecture de l'énoncé avec recul.

La méthode de Gauss quand elle est présente, est bien exécutée, mais les candidats confondent la matrice initiale et sa réduite de Gauss, et prétendent par exemple parfois que M possède alors une ligne nulle.

6. Très souvent, les candidats omettent d'expliquer pourquoi il ne peut y avoir d'autre valeur propre. Certains recherchent les valeurs propres avec le pivot, cela ne rapport alors pas de point ; l'énoncé est très clair et attend qu'on utilise les questions précédentes pour conclure.

Partie C : Étude du cas où a est différent de 0 et 1

7. On relève comme chaque année de grandes confusions entre les notions de dimension et cardinal, cette erreur est donc sanctionnée ici chez de nombreux candidats. On n'attend pas seulement des candidats qu'ils mentionnent qu'il y ait 3 vecteurs, on attend un lien explicite avec la *dimension* de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur lequel on se place.

   L'autre erreur-type est de mentionner que la famille $\mathcal{B}'$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ tout simplement car est constituée de 3 vecteurs, signe d'une méconnaissance de la définition du caractère générateur d'une famille.

8. et 9. Les calculs sont souvent ici faits de façon correcte.

10. Ici les étudiants peuvent avoir répondu juste aux questions précédentes mais se tromper dans l'écriture de la matrice T ; l'erreur la plus classique étant d'oublier d'exprimer les colonnes de la matrice T dans la base $\mathcal{B}'$.

11. Les candidats ont souvent fait l'erreur de dire que comme le nombre 1 est présent deux fois sur la diagonale, alors la dimension du sous-espace propre associé est forcément 2, ce qui leur fait conclure alors que M est diagonalisable.

    Très peu de candidats mentionnent que les valeurs propres de T sont aussi celles de M. Beaucoup perdent du temps inutilement dans des résolutions de systèmes pour obtenir une base des sous-espaces propres, alors que seule la dimension des sous-espaces propres est nécessaire pour répondre à la question. Ces résolutions sont d'autant plus pénibles quand elle sont faites sur M et non sur T.

    Certains candidats obtiennent que les deux sous-espaces propres sont de dimension 2 et donc que la somme est supérieure à 3 sans en être gênés. C'est relativement dommage ; les correcteurs apprécient toujours qu'un candidat relève sur sa copie qu'il remarque une erreur dans son raisonnement, même s'il ne voit pas d'où elle provient.

    Les correcteurs attendent des candidats qu'ils énoncent avec précision les résultats de leur cours. Les phrases « la somme des sous-espaces propres vaut 2 » ou « la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $3 = \dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$ » sont le signe d'une mauvaise restitution d'un cours qui n'est que partiellement compris.

Exercice 2

Cet exercice d'analyse avait pour but d'étudier une fonction définie par une intégrale, où la variable se trouve dans les bornes de l'intégrale : un grand classique de ECE. L'exercice était bien détaillé avec un maximum de réponses données dans l'énoncé, ce qui a permis à tous les candidats d'avancer dans la résolution, même si certaines questions étaient délicates à rédiger correctement. L'exercice enchaînait avec l'étude d'une suite implicite et d'une fonction de deux variables définies à l'aide de la fonction étudiée dans la partie A.

Cette année plus que les précédentes, les correcteurs ont ressenti un relâchement dans la précision de la rédaction ; peut-être expliqué par le confinement et le manque de pratique pendant trois mois. Entre autres :

— Confusion entre les fonctions f et les réels $f(x)$;

— Utilisation abusive ou erronée du signe $\Longleftrightarrow$, parfois à la place du signe $=$

— Notations fantaisistes pour les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 d'une fonction de deux variables

De plus, la présence de nombreux résultats donnés dans l'énoncé a conduit beaucoup de candidats dans cet exercice à tenter des arnaques plus ou moins dissimulées pour obtenir les réponses à partir de calculs faux (notamment questions 3,4,6 de la partie A). Rappelons que ces démarches malhonnêtes n'abusent nullement les correcteurs, et dévalorisent le reste de leur travail.

Partie A : Étude de la fonction f_n

1. Cette question a été rarement bien rédigée, car elle demande un peu de recul sur ce qui est attendu des candidats.

   C'est la continuité de l'intégrande qui est attendu (et non son caractère C^1). Les candidats confondent fréquemment la fonction f_n avec l'intégrande, affirmant que f_n est un quotient de fonctions C^1.

   Le bon raisonnement est d'introduire une primitive de la fonction à intégrer, en lui donnant une notation par exemple φ_n (et le précisant sur sa copie), et d'écrire alors $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_n(0)$.
   La principale erreur est d'alors de dériver la fonction constante $x \mapsto -\varphi_n(0)$ en $x \mapsto -\varphi_n'(0)$.

2. Généralement, les candidats ont bien trouvé le bon sens de variations, même si certains donnent que f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$. La résolution de l'inéquation $x^{2x} > 1$ est cependant rarement convaincante, manquant de rigueur. On trouve de nombreuses résolutions à base de logarithme népérien, sans considération pour la possibilité $x = 0$.

   Certains veulent obtenir un tableau de variations complet avec les limites aux bornes, et les inventent donc.

   Précisons que l'*étude des variations* ne demande que les variations : une phrase de conclusion est suffisante. À l'inverse, la demande du *tableau de variations* dans l'énoncé demanderait les variations *et* les limites aux bornes, un tableau de variations devant être complet.

3. On relève beaucoup d'erreurs dans cette question :
   — Très peu disent ou justifient que f_n' est de classe C^1. .
   — Beaucoup se contentent de « f_n' est dérivable » ou montrent que « f_n' est de classe C^2 ».
   — le calcul de $f"_n(x)$ est souvent faux, ou lorsqu'il est correct donne lieu à des manipulations hasardeuses (par exemple factorisation par x^{2n}) qui rendent l'expression finale incorrecte.
   — l'étude correcte du signe est souvent fausse avec énormément de tentatives d'entourloupes

4. (a) La plupart des candidats se sont lancés dans une étude de fonction, avec une rédaction plus ou moins satisfaisante.

   D'autres méthodes plus rapides mais plus élaborées n'ont pas été explorées par les candidats (utilisation des accroissements finis par exemple).

   (b) Cette question a été très peu faite correctement, ou souvent peu de rigueur.
   Les candidats ont en général intégré sur l'intervalle $[0, x]$ l'inégalité précédente, sans remarquer que cette dernière n'était vraie que pour $t \geqslant 1$. On attend des candidats qu'ils justifient le passage à l'intégrale par un argument minimal (positivité, bornes dans le bon sens).

(c) Question bien traitée, même si certains ne justifient pas avec des théorèmes le résultat pour la fonction. On trouve souvent « par théorème d'encadrement »plutôt que « par comparaison »... Quelques rares candidats confondent la limite en n et la limite en x , ou calculent l'intégrale de la limite pour conclure.

5. De manière surprenante, on relève quelques erreurs sur $f_n(0)$, avec des résultats assez étranges comme -1 ou $\ln(2)$. Pour le signe de $f_n(1)$, il était attendu un argument concernant la *stricte* décroissance de f_n, ce qui a souvent été négligé.

6. Le théorème de la bijection est connu par l'immense majorité des candidats, mais souvent maladroitement rédigé, ou de façon peu rigoureuse. La plupart des candidats oublie par exemple de parler de ce qui se passe sur l'intervalle $]0,1]$.
Les candidats qui a la question 2. avaient dit que f_n était croissante sur $[0,+\infty[$ appliquent souvent le théorème de la bijection à l'intervalle $[0,+\infty[$ sans se rendre compte du problème.

Partie B : Étude d'une suite implicite

7. Cette question a été très peu menée au bout ; les candidats s'arrêtant souvent au premier problème de calcul. Beaucoup de candidats écrivent t^{2n+1} au lieu de $t^{2(n+1)}$ dans $f_{n+1}(x)$. Signalons que la simplification par l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ n'est pas évidente pour une majorité des candidats.

8. (a) Cette question a été bien faite, mais souvent par équivalences successives en partant du résultat. On trouve notamment des calculs très longs et laborieux pour obtenir $\dfrac{x}{2n+2} - \dfrac{1}{2n+1} \geqslant 0$ à partir de $x \geqslant \dfrac{2n+2}{2n+1}$.

   (b) Les candidats qui oublient de mentionner que $x_n \geqslant \frac{2n+2}{2n+1}$ avant d'appliquer la question 8.(a) sont pénalisés, puisque c'est un argument essentiel pour répondre correctement à la question.

   (c) Peu de candidats ont su prouver que (x_n) est décroissante, ne voyant pas le lien avec la question précédente. Beaucoup ont affirmé que (x_n) était minorée par un nombre dépendant de n, preuve d'une assimilation maladroite des définitions.

9. (a) Cette question a été peu traitée, mais l'a été correctement par les quelques qui ont amorcé un raisonnement.

   (b) La plupart des candidats a renoncé à obtenir l'encadrement et s'est contentée de trouver (correctement) la limite.

Partie C : Étude d'une fonction de deux variables

10. On lit dans de plusieurs copies que « G_n est C^2 sur $\mathbb{R}^+$ ». Les étudiants n'ont pas souvent vu qu'ils avaient tout intérêt à garder l'expression f_n dans leurs calculs, sans la remplacer par des intégrales.

11. Tous les candidats savent ce qu'est un point critique.
Cependant, peu arrivent à rédiger proprement la résolution du système et à trouver les deux points mentionnés dans la question suivante.D'ailleurs, certains rusent en anticipant sur la question 12 et trouvent donc *naturellement* deux points critiques. Certaines copies concluent sur quatre points critiques et en restent là.

12. Environ une moitié des candidats fait des calculs corrects, et même des simplifications correctes des hessiennes, tandis que l'autre se perd dans des calculs faux ou ne simplifie pas le résultat. On lit encore dans certaines copies les anciennes notations pour les dérivées partielles.On attend que les candidats respectent celles fixées par le programme ECE.
13. La question est peu traitée ou fausse car soit la hessienne était fausse à la question précédente, soit la résolution de l'équation du second degré a posé problème. Les candidats pensent avoir une unique racine positive.
    La minorité de candidats qui essaient de traiter la question connaissent bien la méthode mais ont du mal à trouver les valeurs propres.
    Le lien entre propriétés du spectre et nature du point critique n'est pas très bien su (on parle en inégalités larges au lieu de strictes ; ou les conclusions sont incohérentes avec le spectre trouvé)
    Une quantité non négligeable de copies utilise des résultats hors-programme (notations r, s, t de Monge ou déterminant), méthodes qui ne peuvent pas apporter la totalité des points, puisqu'elles ne sont pas conformes au seul résultat au programme.
14. Il y a eu plus de réponses correctes ici qu'à la question précédente, la matrice étant diagonale, les valeurs propres étaient plus facilement déterminées..

Exercice 3

Cet exercice introduisait les variables aléatoires de loi de Pareto, utilisant la plupart des raisonnements connus des candidats sur les variables aléatoires à densité vus en première et deuxième année.Il est dommage que très peu de candidats aient pris du recul sur l'énoncé : la plupart des calculs pouvaient être évités grâce au résultat de la question 1 ; dans une immense majorité de copies, on a lu le même calcul réalisé plusieurs fois de suite, ce qui est bien évidemment une perte de temps pour le candidat, et un manque de discernement sur ce qui est attendu de sa part.

D'autre part, on attendait sur les calculs d'intégrales généralisées la plus grande rigueur. Cet exercice doit servir de base de révisions à tous les futurs candidats concernant les bons réflexes à avoir en terme de méthode et de rédaction.

1. Il y avait plusieurs méthodes pour répondre correctement à la question, mais on attendait sur chacune une exigence de rigueur.
    - La première méthode consistait à reconnaître une intégrale de Riemann, puis la calculer.
      Il faut alors invoquer le résultat de cours de façon précise, la convergence « car $n \geqslant 2$ » ne permet pas de démontrer pas que le candidat connaît bien la condition nécessaire et suffisante au programme.
    - Ceux ne reconnaissant pas Riemann, doivent nécessairement parler de la continuité de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^n}$, puis calculer la limite de l'intégrale partielle;

    Dans les deux cas, toute confusion du type « $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n}dt = \int_a^A \frac{1}{t^n}dt$ entre l'intégrale généralisée et l'intégrale partielle est lourdement sanctionnée. On lit en effet de nombreuses maladresses, ou des rédactions expéditives. Cette première question devrait être répondue de manière parfaite par tout candidat qui espère être admis au concours.
2. (a) La définition d'une densité de probabilité est connue, mais ici les candidats répondent plus par automatisme qu'en se posant de réelles questionnements. Beaucoup de candidats écrivent « f est

continue sur $\mathbb{R}$ » par exemple.

Ce qui est regrettable notamment, c'est que très peu ont vu le lien avec la question 1. La majeure partie des candidats recommence dans tout l'exercice les calculs laborieux d'intégrales impropres plutôt que d'exploiter la question 1, notamment en reproduisant les mêmes erreurs de rédaction.

(b) Les principales erreurs se situent dans la séparation des deux cas : $x > a$ ou $x < a$. Les candidats calculent en général sans se préoccuper de la valeur de x. On attend des candidats qu'ils fassent bien apparaître le lien entre la fonction de répartition et la densité : les candidats qui calculent directement des intégrales sans préciser à quoi elles correspondent n'obtiennent pas tous les points.

(c) Cette question est souvent traitée avec peu de rigueur. L'utilisation de la question 1 n'est pas immédiate, les candidats redémontrent tout à chaque fois.
L'étude précise de la convergence (absolue), et donc de l'existence de l'espérance n'apapraît pas souvent. Soit la conclusion « X admet une espérance et $E(X) = \ldots$ » n'apparaît pas souvent, soit les candidats pensent que la tournure « sous réserve de convergence » les décharge de toute vérification ultérieure.

(d) Les mêmes remarques s'appliquent ici, mais les calculs sont souvent corrects. La formule de König-Huygens est bien connue des candidats.

3. (a) Le support a rarement été trouvé correctement, alors même que des candidats pouvaient entrevoir le résultat en lisant la question suivante.

(b) Dans de nombreuses copies, on lit la bonne fonction de répartition pour U, ce qui montre une bonne connaissance du cours. Cependant, la séparation des cas n'apparaît souvent pas, et la manipulation des inégalités est alors souvent périlleuse et non justifiée.

(c) On relève une nette amélioration cette année sur le nombre de copies abordant la première question d'informatique du sujet. Les candidats ont en général bien compris ce qu'il fallait faire. C'est souvent la structure de la fonction qui est incorrecte (emploi de `input` à l'intérieur de la fonction, oubli du `endfunction`, utilisation d'un `disp`, ...).

4. (a) Cette question élémentaire est insuffisamment traitée, puisqu'elle ne nécessitait que d'utiliser la fonction de répartition. Les candidats n'ont souvent pas simplifié le résultat obtenu. On peut lire parfois des valeurs plus grandes que 1, et ce serait préférable que dans un tel cas, le candidat accompagne son résultat d'un commentaire signalant son erreur manifeste.

(b) De même ici, les candidats connaissent la définition de la probabilité conditionnelle mais peu arrivent à simplifier le calcul.Parfois les candidats obtiennent correctement que $[X > 6a] \cap [X > 2a] = [X > 6a]$, mais le justifient avec une inclusion renversée « $[X > 2a] \subset [X > 6a]$ »...

(c) Cette question de Scilab a été peu traitée, rarement en entier, et moins que la question 3(c). Autant les deux premières lignes ont été souvent remplies correctement, autant peu de candidats ont compris que le script devait afficher la valeur de `s2/s1`.

5. (a) Cette question a été plutôt bien faite. Les étudiants connaissent la définition du biais, mais ne mentionnent que très peu la linéarité de l'espérance. Même si les bons candidats maîtrisent le raisonnement, une rédaction minimale est attendue.

(b) De même, la définition du risque quadratique est bien connue, mais la justification de l'indépendance des variables dans le calcul n'est pas toujours évoquée. Les candidats qui veulent affirmer directement que le risque quadratique est égal à la variance doivent impérativement préciser que cela provient du biais nul.

6. (a) Beaucoup de candidats n'écrivent pas l'événement contraire, ou de manière incorrecte (inégalités larges au lieu de strictes) : l'utilisation du mininimum n'est donc pas maîtrisé. C'est pourtant une question classique qui a été travaillée en classe à de maintes reprises : cela se voit car la méthode est restituée à peu près, mais sans grande précision.
   On relève également des confusions pour prouver que la variable aléatoire est à densité quand on en a la fonction de répartition.
   Ceux qui ont essayé ont eu tendance à redémontrer les propriétés d'une fonction de répartition (limites en l'infini, croissance, ...), alors que ce n'est pas la question posée.

   (b) Pour obtenir l'intégralité des points, il fallait préciser qu'on dérivait la fonction de répartition à l'exception du point a. Très peu ont souligné ce problème.

   (c) Encore une fois, il est dommage que le calcul d'intégrale ici soit systématiquement reconduit, au lieu d'utiliser le résultat de la question 1.

   (d) Les calculs étaient plutôt pénibles, mais certains candidats s'en sont sortis avec brio, notamment lorsqu'ils gagnaient du temps en réutilisant la question 1.

7. (a) L'intervalle pour faire varier `k` est quasiment toujours faux.Les candidats ont l'idée d'utiliser `sum`, puisque l'énoncé rappelait son utilisation, mais la syntaxe est rarement la bonne. Très peu de candidats pensent à introduire la ligne `X(k,:)`

   (b) On attendait des candidats qu'ils identifient à l'aide du graphe les valeurs de `a` et `m`. Très peu l'ont fait : es lettres ont souvent été laissées en l'état dans le code Scilab. Seules des tentatives hasardeuses, sans réelles explications, ont été données. Une copie a écrit a et m avec les valeurs attendues.