2021

ANNALES

Mathématiques E

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

Option Economique

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A : Exemples de matrices appartenant à $\mathscr{A}$.

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha I_3 \in \mathscr{A} \iff \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)I_3 = 0 \iff \alpha \in \{-2,-1,0\}$.
   Donc les réels pour lesquels αI_3 appartient à $\mathscr{A}$ sont les réels -2, -1 et 0.

2. D'après la question précédente, la matrice $-I_3$ appartient à $\mathscr{A}$, mais la matrice $-(-I_3)$ n'appartient pas à $\mathscr{A}$.
   Ainsi, l'ensemble $\mathscr{A}$ n'est pas stable par multiplication externe.
   Donc $\mathscr{A}$ n'est pas un espace vectoriel.

3. (a) $BX_1 = -2X_1$ et $BX_2 = -X_2$.

   (b) ◇ $BX_1 = -2X_1$ et X_1 est non nul, donc -2 est une valeur propre de B.
   Et $BX_2 = -X_2$ et X_2 est non nul, donc -1 est une valeur propre de B.
   Ainsi -1 et -2 sont deux valeurs propres de B.

   ◇ Remarquons que $B + 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme les colonnes de $B + 2I_3$ sont toutes colinéaires à la première colonne qui est non nulle, $\operatorname{rg}(B + 2I_3) = 1$. Donc d'après le théorème du rang la dimension de $\ker(B + 2I_3)$ est égale à 2.
   Et d'après la question précédente X_1 est un élément de $\ker(B + 2I_3)$.
   Remarquons également que $(B + 2I_3)X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et que $X_3 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc X_3 est un élément de $\ker(B + 2I_3)$.
   De plus X_1 et X_3 ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre de cardinal 2 de l'espace vectoriel $\ker(B + 2I_3)$ qui est de dimension 2.
   Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-2}(B)$.

   ◇ Comme $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(B)} \dim(E_\lambda(B)) \leqslant 3$, alors $\dim(E_{-2}(B)) + \dim(E_{-1}(B)) \leqslant 3$.
   Donc $\dim(E_{-1}(B)) \leqslant 1$. Or $\dim(E_{-1}(B)) \geqslant 1$.
   Finalement $\dim(E_{-1}(B)) = 1$.
   Or X_2 étant un vecteur non nul dans $E_{-1}(B)$.
   Donc (X_2) est une base de $E_{-1}(B)$.

   (c) La matrice B est carrée d'ordre 3, et $\dim E_{-2}(B) + \dim E_{-1}(B) = 2 + 1 = 3$. Donc la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de B.
   B est donc bien diagonalisable.

En posant : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, P est la matrice de passage de la base canonique vers la base (X_1, X_2, X_3). Donc P est inversible et $B = PDP^{-1}$.

(d) ◇ Remarquons que $D(D+I_3)(D+2I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$,

donc par définition de $\mathscr{A}$, $D \in \mathscr{A}$.

◇ Comme $B = PDP^{-1}$, alors $B + I_3 = PDP^{-1} + PI_3P^{-1} = P(D+I_3)P^{-1}$ et $B + 2I_3 = PDP^{-1} + 2PI_3P^{-1} = P(D+2I_3)P^{-1}$.
Donc $B(B+I_3)(B+2I_3) = PDP^{-1}P(D+I_3)P^{-1}P(D+2I_3)P^{-1} = P(D(D+I_3)(D+2I_3))P^{-1} = 0$.
Ainsi $B \in \mathscr{A}$.

4. On suppose que M est diagonalisable, donc il existe une matrice Δ de la forme $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (où a, b et c sont des réels), et une matrice P inversible telles que $M = P\Delta P^{-1}$.
Or, $\Delta(\Delta + I_3)(\Delta + 2I_3) = \begin{pmatrix} a(a+1)(a+2) & 0 & 0 \\ 0 & b(b+1)(b+2) & 0 \\ 0 & 0 & c(c+1)(c+2) \end{pmatrix}$.
Et a, b et c sont des valeurs propres de M, donc sont des éléments de $\{-2, -1, 0\}$.
Ainsi, $\Delta(\Delta + I_3)(\Delta + 2I_3) = 0$.
Or $M = P\Delta P^{-1}$, donc $M + I_3 = P(\Delta + I_3)P^{-1}$ et $M + 2I_3 = P(\Delta + 2I_3)P^{-1}$.
Donc $M(M+I_3)(M+2I_3) = P\Delta P^{-1}P(\Delta + I_3)P^{-1}P(\Delta + 2I_3)P^{-1} = P(\Delta(\Delta + I_3)(\Delta + 2I_3))P^{-1} = 0$.
Donc $M \in \mathscr{A}$.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathscr{A}$

5. M appartient $\mathscr{A}$, donc $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0$.
Ainsi, $P(X) = X(X+1)(X+2)$ est un polynôme annulateur de M.
Le spectre de M est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme annulateur P.
Or, le polynôme P admet exactement 3 racines : -2, -1 et 0.
Donc le spectre de M est inclus dans $\{0, -1, -2\}$.

6. La matrice M est une matrice carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes.
Donc M est diagonalisable.

7. (a) Par définition, pour tout réel λ : λ est une valeur propre de $M \iff M - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
On suppose que -1 est l'unique valeur propre de M, donc ni 0 ni -2 ne sont valeurs propres de M.
Donc les matrices M et $M + 2I_3$ sont inversibles.
Comme $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0$, en multipliant à droite par $(M+2I_3)^{-1}$ et à gauche par M^{-1}, on obtient $M + I_3 = 0$, donc $M = -I_3$.

(b) De même, si $\mathrm{Sp}(M) = \{-2\}$, alors $M = -2I_3$ et si $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$, alors $M = 0$.

8. Si $Sp(M) = \emptyset$, alors pour tout réel λ, $M - \lambda I_3$ est inversible.
En particulier, les matrices M, $M + I_3$ et $M + 2I_3$ sont inversibles.
Comme $M(M + I_3)(M + 2I_3) = 0$, en multipliant à gauche par $(M + 2I_3)^{-1}(M + I_3)^{-1}M^{-1}$, on obtient l'égalité : $I_3 = 0$, ce qui est absurde.
Donc M admet au moins une valeur propre.

9. (a) 0 n'est pas valeur propre de M, donc M est inversible. Comme $M(M+I_3)(M+2I_3) = 0$, en multipliant à gauche par M^{-1}, on obtient : $(M + I_3)(M + 2I_3) = 0$.
Enfin, M étant la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$: $(f + Id) \circ (f + 2Id) = 0$.
Or, $(f + Id) \circ (f + 2Id) = f^2 + f + 2Id = (f + 2Id) \circ (f + Id)$. Donc $(f + 2Id) \circ (f + Id) = 0$.

(b) $-1 \in Sp(M)$, donc $-1 \in Sp(f)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f + Id) \neq \{0\}$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f + Id)) \geqslant 1$.
De même, -2 est valeur propre de f, donc $\dim(\mathrm{Ker}(f + 2Id)) \geqslant 1$.

(c) D'après ce qui précède, $\dim(\mathrm{Ker}(f + Id)) + \dim(\mathrm{Ker}(f + 2Id)) \geqslant 2$.
Mais M n'est pas diagonalisable, donc f n'est pas diagonalisable et $\displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda Id)) < 3$,
donc $\dim(\mathrm{Ker}(f + Id)) + \dim(\mathrm{Ker}(f + 2Id)) \leqslant 2$.
Finalement : $\dim(\mathrm{Ker}(f + Id)) + \dim(\mathrm{Ker}(f + 2Id)) = 2$.
Et $\dim(\mathrm{Ker}(f + Id)) = \dim(\mathrm{Ker}(f + 2Id)) = 1$.

(d) i. Les vecteurs u et v sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, donc la famille (u, v) est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$.

ii. ⋆ Montrons d'abord que la famille (u, v, w) est une famille libre.
Soient a, b et c trois réels tels que $au + bv + cw = 0$.
Si $c \neq 0$, alors $w = -\frac{a}{c}u - \frac{b}{c}v$ donc $w \in Vect(u, v)$.
Donc par contraposée $c = 0$. Ainsi $au + bv = 0$.
Et comme la famille (u, v) est libre, $a = b = 0$. Donc la famille (u, v, w) est libre.

⋆ De plus, $\mathrm{Card}(u, v, w) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

Donc la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

iii. ⋄ Comme $\Big((f + Id) \circ (f + 2Id)\Big)(w) = 0$, alors $(f + Id)\,(f(w) + 2w) = 0$, c'est-à-dire $f(w) + 2w \in \mathrm{Ker}(f + Id)$.
Or, la dimension de $\mathrm{Ker}(f + Id)$ est égale à 1, et u est un élément non nul de ce sous-espace vectoriel, donc $\mathrm{Ker}(f + Id) =$ Vect (u). Ainsi il existe un réel α tel que $f(w) + 2w = \alpha u$.
Et de même $\Big((f + 2Id) \circ (f + Id)\Big)(w) = 0$, donc $f(w) + w \in \mathrm{Ker}(f + 2\ Id)$.
Or $\mathrm{Ker}(f + 2\ Id)$ est un espace vectoriel de dimension 1 contenant le vecteur non nul v. Donc $\mathrm{Ker}(f + 2\ Id) = \mathrm{Vect}(v)$.
Donc il existe un réel β tel que $f(w) + w = \beta v$.

⋄ Finalement, $\begin{cases} f(w) + 2w = \alpha u \\ f(w) + w = \beta v \end{cases}$ donc en soustrayant ces deux lignes $w = \alpha u - \beta v$.

Or $w \notin Vect(u,v)$.

$\boxed{\text{Donc } M \text{ est diagonalisable.}}$

10. ($\Longleftarrow$) D'après la question 4, si M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0,-1,-2\}$, alors $M \in \mathscr{A}$.

($\Longrightarrow$) Réciproquement, supposons que $M \in \mathscr{A}$.

D'après la question 5 que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0,-1,-2\}$.

De plus d'après la question 8, M admet au moins une valeur propre. Donc M admet une, deux ou trois valeurs propres.

Et dans ces trois cas, les questions précédentes permettent de conclure que M est bien diagonalisable.

En conclusion $M \in \mathscr{A} \iff M$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0,-1,-2\}$.

EXERCICE 2

Partie A

1. (a) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{1+t^n}\right) = 1$, donc : $\dfrac{1}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} 1$. En multipliant par $\ln(t)$, $\boxed{\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t).0}$

(b) La fonction ln est continue sur $]0,1]$ et admet pour primitive la fonction : $t \mapsto t\ln(t) - t$.

Donc : $\forall y \in]0,1]$, $\displaystyle\int_y^1 \ln(t)\mathrm{d}t = \Big[t\ln(t) - t\Big]_y^1 = -1 + y - y\ln(y)$.

De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{y\to 0}(y\ln(y)) = 0$, donc $\lim\limits_{y\to 0}(-1+y-y\ln(y)) = -1$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut -1.

(c)
- La fonction $t \mapsto \dfrac{-\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $]0,1]$.
- D'après 1(a), $-\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$.
- D'après 1(b), l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
- Les fonctions $t \mapsto -\dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ et $t \mapsto -\ln(t)$ sont positives sur $]0,1]$.

Ainsi, d'après le critère d'équivalence des fonctions positives, l'intégrale définissant J_n converge (puisque celle définissant $-J_n$ converge).

2. (a) Commençons par un calcul d'équivalent : $t^{\frac{3}{2}}\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{\frac{3}{2}}\dfrac{\ln(t)}{t^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{n-\frac{3}{2}}}$.

Et $n \geqslant 2$, donc $n - \dfrac{3}{2} > 0$, donc par croissances comparées : $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(t)}{t^{n-3/2}}\right) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(t^{3/2}\dfrac{\ln(t)}{1+t^n}\right) = 0$.

(b) • La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

• D'après 2(a), $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$.

• L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ converge (c'est une intégrale de Riemann, avec $\alpha = 3/2 > 1$).

• Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^n}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ sont positives sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, d'après le critère de négligeabilité des fonctions positives, l'intégrale définissant K_n converge.

3. L'intégrale définissant J_n et l'intégrale définissant K_n convergent, et $I_n = J_n + K_n$.
Donc l'intégrale définissant I_n converge.

Partie B

4. (a) Soit $t \in]0,1]$. On a : $\dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) = \dfrac{\ln(t) - \ln(t) - t^n\ln(t)}{1+t^n} = \dfrac{-t^n\ln(t)}{1+t^n}$.
De plus, $1 + t^n \geqslant 1 > 0$. Donc $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t^n} \leqslant 1$.
En multipliant par $-t^n\ln(t) \geqslant 0$, l'inégalité devient $0 \leqslant \dfrac{-t^n\ln(t)}{1+t^n} \leqslant -t^n\ln(t)$.

Donc $\forall t \in]0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n\ln(t)$.

(b) Soit y un réel de $]0,1]$
Posons pour tout t de $]y,1]$: $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = -\dfrac{t^{n+1}}{n+1}$. Les fonctions u et v ainsi définies sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]y,1]$, et : $\forall t \in]y,1],\ u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = -t^n$.
Ainsi, par intégrations par parties :

$$\int_y^1 -t^n\ln(t)\mathrm{d}t = \left[-\ln(t)\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_y^1 + \int_y^1 \frac{t^n}{n+1}\mathrm{d}t = \ln(y)\frac{y^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}(1-y^{n+1})$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{y\to0} \ln(y)y^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{y\to0}\left(\ln(y)\dfrac{y^{n+1}}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2}(1-y^{n+1})\right) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

(c) D'après la question 4(a) : $\forall t \in]0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t) \leqslant -t^n\ln(t)$.

Et d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc on peut intégrer l'encadrement précédent entre 0 et 1 :

$$\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant \int_0^1 \left(\frac{\ln(t)}{1+t^n} - \ln(t)\right) dt \leqslant \int_0^1 -t^n\ln(t)\mathrm{d}t.$$

Donc $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant J_n + 1 \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Ainsi, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} (J_n+1) = 0$, i.e. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -1.}$

5. (a) $\diamond$ • La fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc : $\forall x \geqslant 1,\ \ln(x) \geqslant \ln(1) \geqslant 0$.

• D'autre part, la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sa courbe représentative est en dessous de ses tangentes, et en particulier en dessous de la tangente au point d'abscisse 1, qui a pour équation : $y = x - 1$.

Donc : $\forall x \geqslant 1,\ \ln(x) \leqslant x - 1 \leqslant x$.

$\boxed{\text{En conclusion, } \forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant \ln(x) \leqslant x \quad (*).}$

$\diamond$ D'autre part, pour tout réel x supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 3 :

$$1 + x^n \geqslant x^n > 0,\ \text{donc } 0 \leqslant \frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{x^n}. \quad (**)$$

Multiplions terme à terme les encadrements $(*)$ et $(**)$: $\boxed{\forall x \geqslant 1 \text{ et } \forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{1+x^n} \leqslant \dfrac{1}{x^{n-1}}.}$

(b) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \mathrm{d}x$ est une intégrale de Riemann convergente ($n \geqslant 3$, donc $n - 1 \geqslant 2 > 1$). Et

$$\forall y \geqslant 1,\ \int_1^y \frac{1}{x^{n-1}} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n-2} \frac{1}{x^{n-2}} \right]_1^y = \frac{1}{n-2} \left(1 - \frac{1}{y^{n-2}} \right)$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \mathrm{d}x = \frac{1}{n-2}$.

Intégrons alors l'encadrement obtenu en 5(a), entre 1 et $+\infty$:

$$\forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^n} \mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \mathrm{d}x$$

$\boxed{\text{Donc } 0 \leqslant K_n \leqslant \dfrac{1}{n-2}.}$

(c) Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$.

Rappelons aussi que : $\forall n \geqslant 2,\ I_n = J_n + K_n$.

Or, (J_n) converge vers -1 et (K_n) converge vers 0, $\boxed{\text{donc par somme, } (I_n) \text{ converge vers } -1.}$

Partie C

6. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et y un réel de $]0, 1]$.

Posons $\forall t \in]0, 1],\ \varphi(t) = -\ln(t)$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$, décroissante sur $[y, 1]$, bijective de $]y, 1]$ vers $[0, -\ln(y)]$, et $\forall t \in]y, 1],\ \varphi'(t) = -\dfrac{1}{t} = -e^{\varphi(t)}$.

Donc : $\displaystyle\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} \mathrm{d}t = \int_y^1 \frac{-\varphi(t)}{1+e^{-n\varphi(t)}} . \left(-e^{-\varphi(t)} \varphi'(t) \right) \mathrm{d}t = \int_{\varphi(y)}^{\varphi(1)} \frac{u}{1+e^{-nu}} e^{-u} \mathrm{d}u = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u} \mathrm{d}u.$

$\boxed{\text{Ainsi } \forall y \in]0, 1],\ \displaystyle\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n} \mathrm{d}t = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u}\, \mathrm{d}u.}$

7. (a) La variable aléatoire X admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) Par théorème du transfert, Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+e^{-nu}} f(u) du$ converge absolument, c'est-à-dire si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u}\, du$ converge (intégrale d'une fonction positive).

Or, d'après la question précédente : $\forall y \in]0,1]$, $\displaystyle\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{-\ln(y)} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u}\, du$.

Comme $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\int_y^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = J_n$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+e^{-nu}} e^{-u}\, du$ converge et vaut J_n.

Donc Y_n admet une espérance, et $E(Y_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-u}{1+e^{-nu}} f(u) = J_n$.

8.
```
function Y=simulY(n,m)
    Y=zeros(1,m)
    for i=1:m
        X=grand(1,1,'exp',1)
        Y(i)=-X/(1+exp(-n*X))
    end
endfunction
```

9. (a) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

(b)
```
n=input('Entrer la valeur de n')
disp(mean(simulY(n,1000)))
```

Le script ci-dessus demande à l'utilisateur une valeur de n. Puis il effectue 1000 simulations de la variable aléatoire Y_n et calcule et affiche la moyenne des résultats obtenus.

D'après la loi faible des grands nombres, le résultat affiché est une valeur approchée de l'espérance de Y_n.

Conclusion : Le script ci-dessus demande à l'utilisateur une valeur de n et affiche une valeur approchée de J_n.

EXERCICE 3

Partie A

1. ◇ $[X=2]=P_1\cap P_2$, donc par indépendance : $a_2=(X=2)=(P_1\cap P_2)=(P_1)\times(P_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

   Donc $a_2=\frac{1}{4}$.

   ◇ $[X=3]=F_1\cap P_2\cap P_2$, donc par indépendance : $a_3=(X=3)=(F_1)\times(P_2)\times(P_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

   Donc $a_3=\frac{1}{8}$.

   ◇ $[X=4]=(P_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)\cup(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)$, donc par disjonction de cas, puis par indépendance

$$a_4=(X=4)=(P_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)+(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

   Donc $a_4=\frac{1}{8}$.

2. $\forall n\geqslant 2,\ U_n=\bigcup_{k=2}^{n}[X=k]$, donc par incompatilibité : $u_n=(U_n)=\sum_{k=2}^{n}(X=k)$.

   Ainsi $\forall n\geqslant 2,\ u_n=\sum_{k=2}^{n}a_k$.

3. (a)

```
function y=simulX()
    tirs=0
    pile=0
    while pile <2
        if rand()<1/2 then pile=pile+1
        else
            pile=0
        end
        tirs=tirs+1
    end
    y=tirs
endfunction
```

   (b)

```
function s=moyenne(n)
    s=0
    for i=1:n
        s=s+simulX()
    end
    s=s/n
endfunction
```

(c) On observe sur le graphe fourni que lorsque la taille de l'échantillon augmente, la valeur obtenue pour la moyenne des résultats observés se stabilise autour d'une valeur proche de 6.
On peut donc conjecturer que X admet une espérance qui vaut environ 6.

Partie B

4. (a) Remarquons que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $U_n = \displaystyle\bigcup_{k=2}^{n} B_k$.

Ainsi : $\forall n \geqslant 2,\ U_{n+1} = \displaystyle\bigcup_{k=2}^{n+1} B_k = \left(\bigcup_{k=2}^{n} B_k\right) \cup B_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$.

Donc $\forall n \geqslant 2 : (U_{n+1}) = (U_n) + (B_{n+1}) - (U_n \cap B_{n+1})$.

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 4 :

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= (U_n \cap F_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (U_n \cap P_{n-1} \cap B_{n+1}) \\ &= (U_n \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (U_n \cap P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \end{aligned}.$$

◇ D'une part, $U_n \cap F_{n-1} = U_{n-2} \cap F_{n-1}$: en effet, F_{n-1} est incompatible avec B_{n-1} et B_n, donc si F_{n-1} et U_n se réalisent, U_{n-2} est réalisé.
Donc $U_n \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} = U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$.

◇ D'autre part, $P_{n-1} \cap P_n \subset U_n$, donc $U_n \cap P_{n-1} \cap P_n = P_{n-1} \cap P_n$, et $U_n \cap P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}$.

Ainsi $\forall n \geqslant 4 :\ U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) \cup (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1})$.

(c) L'union d'événements écrite à la question précédente est une union d'événements incompatibles, donc :

$$(U_n \cap B_{n+1}) = (U_{n-2} \cap F_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}) + (P_{n-1} \cap P_n \cap P_{n+1}).$$

Et par indépendance :

$$(U_n \cap B_{n+1}) = (U_{n-2}) \times (F_{n-1}) \times (P_n) \times (P_{n+1}) + (P_{n-1}) \times (P_n) \times (P_{n+1}) = \frac{1}{8}u_{n-2} + \frac{1}{8}$$

Donc d'après la question 4(a) :

$$\forall n \geqslant 4,\ u_{n+1} = (U_{n+1}) = \mathbf{P}(U_n) + \mathbf{P}(B_{n+1}) - \mathbf{P}(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}u_{n-2} - \frac{1}{8}$$

Ainsi $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

5. ◇ $\forall n \geqslant 4,\ U_n \subset U_{n+1} \subset \Omega$, donc $(U_n) \leqslant (U_{n+1}) \leqslant (\Omega)$, c'est-à-dire : $\forall n \geqslant 4,\ u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

◇ Donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 1, donc converge vers un réel ℓ.
Or $\forall n \geqslant 4,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
Par passage à la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, $\ell = \ell + \dfrac{1}{8}(1 - \ell)$.
Donc $\ell = 1$. Ainsi la suite (u_n) converge vers 1.

6. Tout d'abord, $(X=-1)=\overline{\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right)} = 1-\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right)$.

   De plus, (U_n) est une suite croissante d'événements pour l'inclusion, donc :
$$\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{N\to+\infty} (U_N) = 1.$$

   Ainsi $(X=-1) = 1-\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n\right) = 0$.

Partie C : Étude de l'espérance de X.

7. D'après la question 4(c), $\forall n \geqslant 4,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1-u_{n-2})$.

   Donc $1-v_{n+1} = 1-v_n+\frac{1}{8}v_{n-2}$.

   Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 : $v_n - v_{n+1} = \frac{1}{8}v_{n-2}$.

8. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   $(X>n) = (X=n+1)\cup(X>n+1)$, donc par disjonction :
$$\begin{aligned}(X=n+1) &= (X>n)-(X>n+1)\\ &= \big(1-(X\leqslant n)\big)-\big(1-(X\leqslant n+1)\big)\\ &= (1-u_n)-(1-u_{n+1})\end{aligned}$$

   Ainsi $\forall n\geqslant 2$, $(X=n+1) = v_n - v_{n+1}$.

9. **(I)** D'une part, $S_2 = 2(X=2) = \frac{1}{2}$.
   D'autre part, $6-8v_4-2v_2 = 6-8(1-u_4)-2(1-u_2)$.
   Pour calculer u_2 et u_4, on utilise les résultats de la partie A :
$$u_2 = a_2 = \frac{1}{4},\ \text{et}\ u_4 = a_2+a_3+a_4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$
   Donc $6-8v_4-2v_2 = 6-4-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, ains $S_2 = 6-8v_4-2v_2$.

   (H) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons que $S_n = 6-8v_{n+2}-nv_n$.
$$\begin{aligned}S_{n+1} &= S_n+(n+1)(X=n+1)\\ &= S_n+(n+1)(v_n-v_{n+1})\\ &\underset{HR}{=} 6-8v_{n+2}-nv_n+(n+1)v_n-(n+1)v_{n+1}\\ &= 6-8v_{n+2}+v_n-(n+1)v_{n+1}.\end{aligned}$$
   Or, n est supérieur ou égal à 2, donc $n+2\geqslant 4$. Donc d'après le résultat de la question 7 :
$$v_{n+2}-v_{n+3} = \frac{1}{8}v_n,\ \text{ou encore}\ -8v_{n+2}+v_n = -8v_{n+3}$$
   Ainsi, $S_{n+1} = 6-8v_{n+3}-(n+1)v_{n+1}$, donc $S_{n+1} = 6-8v_{n+3}-(n+1)v_{n+1}$.

(C) $\boxed{\text{Ainsi } \forall n \geqslant 2,\ S_n = 6 - 8v_{n+2} - nv_n.}$

10. ◇ $\forall n \geqslant 2,\ S_{n+1} - S_n = (n+1)(X = n+1) \geqslant 0$,, $\boxed{\text{donc la suite } (S_n)_{n\geqslant 2} \text{ est croissante.}}$

 ◇ $\forall n \geqslant 2,\ u_n = (U_n) \leqslant 1$, donc $v_n = 1 - u_n \geqslant 0$.
 Donc $\forall n \geqslant 2,\ S_n \leqslant 6$. $\boxed{\text{Ainsi la suite } (S_n)_{n\geqslant 2} \text{ est majorée}}$

11. La suite (S_n) est croissante et majorée, donc convergente.
 Cela signifie que la série de terme général $n(X = n)$ converge, et le terme général de cette série étant positif, cela revient à dire qu'elle converge absolument.
 $\boxed{\text{Donc la variable aléatoire } X \text{ admet une espérance}}$.

12. (a) $\forall n \geqslant 2,\ nv_n = 6 - 8v_{n+2} - S_n$.
 Or, la suite (v_{n+2}) converge vers 0 et la suite (S_n) est convergente.
 $\boxed{\text{Par somme, la suite } (nv_n) \text{ converge vers un réel } \lambda.}$

 (b) Supposons que λ est non nul. Dans ce cas, $nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda$, et ainsi : $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$.
 Comme la série de terme général $\dfrac{\lambda}{n}$ diverge, donc en utilisant le critère d'équivalence des suites positives (la suite (v_n) est bien positive), alors la série de terme général v_n diverge.
 Or d'après la question 7, $\forall n \geqslant 4,\ v_n - v_{n+1} = \dfrac{1}{8}v_{n-2}$.
 Pour N supérieur ou égal à 4, $\displaystyle\sum_{n=4}^{N}(v_n - v_{n+1}) = \frac{1}{8}\sum_{n=4}^{N} v_{n-2}$.
 Or, pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 4, $\displaystyle\sum_{n=4}^{N}(v_n - v_{n+1}) = \sum_{n=4}^{N} v_n - \sum_{n=4}^{N} v_{n+1} = v_4 - v_{N+1}$.
 Donc $\displaystyle v_{N+1} = v_4 - \frac{1}{8}\sum_{n=4}^{N} v_{n-2}$, et puisque la série de terme général v_n diverge, la suite (v_{N+1}) diverge.
 Or la suite (v_n) converge vers 0.
 Donc $\lambda = 0$, et $\boxed{\text{la suite } (nv_n) \text{ tend vers } 0.}$

 (c) Ainsi, par somme, la suite (S_n) converge vers 6.
 $$\boxed{\text{Donc } E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(X = n) = \lim_{n\to+\infty} S_n = 6.}$$

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

RAPPORT D'ÉPREUVE

Remarques globales

Avec une moyenne de 11,48 et un écart-type de 5,44, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Forme

Le soin apporté à la présentation de la copie afin de la rendre lisible par le correcteur est un élément qui est pris en compte dans l'évaluation du travail du candidat. Pour une majorité des candidats, cet aspect semble bien compris et ainsi leur copie est lisible, aérée, voire même agréable à corriger. Cependant il reste quelques candidats dans une proportion non négligeable malheureusement, pour lesquels la copie est illisible soit par le manque de soin apporté à la présentation globale, soit par la présence trop importante de ratures, soit par un graphisme indéchiffrable empêchant la distinction des lettres, soit par le non-respect de la numérotation des exercices et des questions.
Un manque de soin également dans l'écriture des objets mathématiques est à noter et de plus en plus fréquent. En plus d'être en général incorrect ou ne traduisant clairement pas la pensée du candidat, il est souvent source d'erreur dans le raisonnement mené. Par exemple ce manque de rigueur se retrouve dans l'écriture des sous-espaces vectoriels, de la négligeabilité, ou encore dans l'oubli presque systématique de la différentielle $\mathrm{d}t$ dans les intégrales, dans l'oubli fréquent de parenthèses dans les calculs algébriques : par exemple $a(b+c)$ est fautivement écrit $a\ b+c$ mais correctement perçu comme $a(b+c)$ ou encore dans la disposition des barres de fraction en cascade gravement fausse.

Fond

Une bonne connaissance des notions et des résultats fondamentaux du cours est indispensable pour répondre aux différents exercices.
En général le vocabulaire du cours est mal connu donc mal employé, beaucoup de confusions entre les différentes notions figurent dans les copies : l'ordre ou la taille d'une matrice carrée n'est pas son rang (la dimension d'une matrice n'a pas de sens), le rang d'une famille de vecteurs au lieu de nombre d'éléments de cette famille (la dimension d'une famille de vecteurs n'a pas de sens) ; des vecteurs libres ne remplacent pas une famille libre de vecteurs ; une intégrale impropre convergente n'est pas toujours une intégrale faussement impropre ; en probabilité, les lancers ne sont pas incompatibles.
De même les candidats ont une certaine tendance à assimiler un événement et sa probabilité : ainsi des réunions de nombres réels ou des additions d'événements sont rencontrées. Une rédaction correcte avec les justifications nécessaires (par vérification, calcul ou rappel des hypothèses pour appliquer tel théorème utilisé) est indispensable pour se voir attribués tous les points de la question. Les « entourloupes » pour arriver à obtenir coûte que coûte un résultat donné dans le sujet ne trompent personne et sont sévèrement sanctionnés.
Les réponses aux questions en informatique ont montré que les syntaxes correctes ne sont pas maîtrisées.
Enfin, beaucoup de maladresses et de lacunes dans la gestion des calculs sont à noter. Les inégalités sont mal maîtrisées : de très nombreuses confusions entre les inégalités larges et strictes ; pas assez de rigueur dans la

gestion des signes (multiplier par une quantité négative sans changer le sens de l'inégalité, multiplier deux inégalités membre à membre sans contrôler que tous les termes sont positifs, ...).

Remarques question par question

Exercice 1

Partie A : Exemples de matrices appartenant à $\mathscr{A}$.

1. Dans la résolution de cette question, certains automatismes apparaissent et montrent un manque de réflexion face aux questions posées. Ainsi de nombreux candidats pensent que $AB = 0$ implique $A = 0$ ou $B = 0$ quand A et B sont des matrices, ou encore d'autres candidats développent $(\alpha+1)(\alpha+2)$ avant d'en calculer le discriminant pour en trouver les racines !

2. De trop nombreux candidats pensent que $\mathscr{A}$ est un espace vectoriel et le prouvent à coup d'affirmations non justifiées. Quelques uns peinent à prouver la stabilité par combinaison linéaire (ce qui est normal, car il n'y a pas stabilité) mais ils ne mettent pas alors en défaut l'affirmation qu'ils tentent de prouver. Un temps d'analyse de l'énoncé n'est pas du temps perdu quand il permet d'établir une stratégie de résolution.
   Des confusions apparaissent aussi à cette question entre la stabilité par combinaison linéaire et la linéarité d'une application.

3. (a) Cette question demandant un calcul matriciel est en très grand majorité très bien traitée.
   Cependant quelques rares candidats ne savent pas effectuer le produit matriciel demandé et trouvent que BX_1 est une matrice carrée d'ordre 3.

   (b) Cette question est globalement assez bien traitée, mais avec une rédaction bien trop imprécise quant à la justification des égalités ou des implications.
   Il est cependant regrettable que certains candidats n'utilisent pas la question précédente, mais déterminent les valeurs propres et les sous-espaces propres à partir de la résolution d'un système long et pénible.
   La vérification de la non(nullité du vecteur pour prouver l'existence d'une valeur propre n'est pas systématique, c'est dommage. De même l'égalité $BX_1 = -X_1$ ne permet pas d'affirmer directement que (X_1) constitue une base du sous-espace propre associé à la valeur propre -1.
   La détermination du spectre de B demande un petit travail. Seule une inclusion résulte de la question précédente. 0 n'est pas toujours une valeur propre d'une matrice donnée. C'est en particulier le cas ici. Contrairement à ce qui est affirmé par certains candidats, 0 n'est en effet pas une valeur propre de B et ces candidats auraient dû réagir quand ils aboutissent à la conclusion que le seul vecteur associé à la valeur propre 0 est le vecteur nul.

   (c) Cette question est souvent bien traitée.
   Cependant, la justification de l'inversibilité de P est à soigner, mais ne nécessite pas le calcul de P^{-1} qui fait perdre beaucoup de temps aux candidats qui se lancent dans ce calcul.
   La justification de la diagonalisabilité de B est rarement correcte : B n'est pas symétrique ici, donc cet argument ne peut pas être valable ; certains utilisent l'argument $\dim(B) = \dim(E) = 3$, qui est doublement incorrect : le terme « dimension de B » n'a pas de sens et E est un espace vectoriel de dimension 9.

(d) En grande majorité, les candidats ont choisi de résoudre cette question par le calcul en effectuant les produits matriciels définissant les éléments de $\mathscr{A}$.
Quelques-uns affirment sans aucune preuve que « puisque B et D sont semblables, si $D \in \mathscr{A}$, alors $B \in \mathscr{A}$ » ; aucun résultat du cours ne permet de l'affirmer, une preuve détaillé était attendue.

4. Cette question est très peu traitée.
Les quelques candidats qui l'ont tentée ne l'ont pas comprise : ils ont confondu les hypothèses et la conclusion et n'ont pas réussi à distinguer cette question de la suivante.

Partie B : Diagonalisabilité des matrices de $\mathscr{A}$.

5. Cette question est en général bien traitée. Cependant les candidats perdent du temps en développant l'expression $(*)$ pour trouver un polynôme annulateur, dont ils cherchent ensuite les racines. Il serait plus efficace de reconnaître directement la forme factorisée. Rappelons cependant que $M^3 + 3M^2 + 2M$ n'est pas un polynôme ni $X^3 + 3X^2 + 2X = 0$, ni même $X^3 + 3I_3X^2 + 2I_3X$.
Certains candidats se contentent de vérifier que 0, -1 et -2 sont des racines de P sans préciser qu'il n'y en a pas d'autre.

6. Cette question est en général bien comprise et traitée.
Attention, la dimension d'une matrice est un terme impropre. Et le rang de la matrice importe peu ici, il semble être souvent confondu avec la taille de cette dernière.

7. (a) Cette question n'est en général traitée que partiellement, la dernière déduction a posé de nombreux problèmes.
Comme à la question 1., certains candidats affirment que si le produit de plusieurs matrices est nul, alors au moins l'une de ces matrices est nulle.
D'autres ont supposé que M était diagonalisable. D'autres encore ont collé ici le raisonnement indiquant qu'une matrice diagonalisable admettant une seule valeur propre est une homothétie.
Rappelons enfin que la somme de deux matrices inversibles n'est pas toujours une matrice inversible, qu'il existe des matrices non nulles et non inversibles, ainsi que l'implication « M est non nulle donc inversible » est fausse, ainsi que sa contraposée.

(b) Cette question est peu abordée.
Une analyse correcte du sujet a permis à certains candidats de répondre avec efficacité et exactitude à cette question, une simple analogie avec la question précédente était à mettre en évidence.

8. La contradiction a été très peu écrite car non comprise.
Beaucoup prouvent en partant de l'hypothèse que M n'admet pas de valeur propre, que le spectre de M est vide. Certains pensent que si M n'a pas de valeurs propre, alors elle n'admet pas de polynôme annulateur.

9. (a) Cette question a mis en défaut les candidats qui peinent à distinguer endomorphisme et matrice, ou qui ont du mal à lier ces notions.
Ainsi la confusion entre endomorphisme et matrice aboutit à des écritures du type « $(f + Id) \circ (f + 2id) = (M + I)(M + 2I)$ ». La démonstration de la commutativité est rarement faite. La justification de l'implication $f \circ (f + Id) \circ (f + 2id) = 0 \Longrightarrow (f + Id) \circ (f + 2id) = 0$ est très peu justifiée et quand elle l'est, utilise l'argument $f \neq 0$.
De nombreux candidats utilisent la « propriété » : $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (X - \lambda)$ est annulateur de M.

(b) Cette question est traitée par une moitié des candidats, semble avoir été comprise par certains mais toujours très mal rédigée.
Pour de nombreux candidats, $(f+Id) \in \mathrm{Ker}(f+2Id)$. Cet argument leur permet de conclure que $\mathrm{Ker}(f+2Id)=\emptyset$ ou directement $\dim(\mathrm{Ker}(f+2Id)) \geqslant 1$. Une confusion entre l'ensemble vide et $\{0\}$ est très répandue.
Certains candidats ont tenté d'invoquer le théorème du rang.

(c) Cette question est peu abordée, mais quand elle l'est, elle est mieux réussie que la précédente.

(d) i. Beaucoup ont pris des valeurs particulières pour u et v, et très souvent reviennent à la matrice B. Pour certains, comme u et v sont des vecteurs non nuls, alors la famille (u,v) est libre. Beaucoup affirment que la concaténation de familles libres est encore libre. Le fait que u et v soient associés à des valeurs propres *distinctes* n'est pas mentionné.

ii. Cette question est souvent mal traitée.
Des confusions entre cardinal, dimension apparaissent à nouveau à cette question.
La rédaction suivante et fréquemment rencontrée : « w n'est pas dans $Vect(u,v)$ donc la famille (u,v,w) est libre » attend un peu plus de justifications ou d'explications.

iii. Cette question est très peu traitée.
La composition d'applications est peu maîtrisée, l'écriture suivante $(f+Id)(w)\circ(f+2id)(w)=0$ est souvent rencontrée et n'a pas de sens.

10. Cette question est très rarement abordée.
Le travail de synthèse à faire demandait du temps et une bonne maîtrise des règles logiques, que beaucoup de candidats n'ont pas clairement en tête.

Exercice 2

Partie A

1. (a) Cette question est souvent abordée et en général bien faite.
Quelques erreurs sont cependant assez régulièrement rencontrées :
« Comme $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0} \ln(t) = -\infty$ alors $\dfrac{\ln t}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln t$ », ou encore « $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} = \lim\limits_{t\to 0} \ln(t)$ » ou encore « $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(t)}{1+t^n} = \ln(t)$ ».

(b) La primitive usuelle de $x \mapsto \ln(x)$ est souvent connue.
De nombreux candidats réécrivent une autre intégrale partielle avec une lettre différente que celle proposée dans l'énoncé pour prouver la convergence !
La croissance comparée n'est pas toujours mentionnée. Un certain nombre de candidats ne voit pas de problème à écrire « $\ln(0)$ » pour conclure sur la convergence de l'intégrale !

(c) Le critère d'équivalence n'est pas correctement acquis, en particulier la continuité n'est jamais vérifiée et beaucoup pensent que l'intégrande est positive quand ils pensent à regarder son signe.
Certains affirment à partie de la question 1.(a) que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\mathrm{d}\,t \underset{t\to 0}{\sim} \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}\,t$, et qui de plus concluent sur la valeur de l'intégrale J_n.

2. (a) Les résolutions proposées sont dans l'ensemble décevantes.
Pour certains la limite demandée vaut $+\infty$.
Les équivalences sont souvent très mal manipulées.

(b) En grande majorité les candidats ne parviennent pas à traduire la limite de la question précédente sous la forme d'une négligeabilité.
L'intégrale de Riemann n'est pas toujours reconnue, et le candidat se lance parfois dans son calcul pour justifier sa convergence. Et quand elle est reconnue, l'argumentation est incomplète : l'intégrale converge « par critère de Riemann », sans en vérifier les hypothèses.
Plusieurs candidats affirment que si l'intégrande admet une limite finie en $+\infty$, alors l'intégrale impropre en $+\infty$ converge.
De manière générale un grand manque de rigueur est à déplorer dans l'utilisation du critère de comparaison des intégrales impropres de fonctions continues positives. Les hypothèses du théorème ne sont que très rarement contrôlées.

3. Cette question est plutôt assez bien traitée par les candidats. Quelques confusions de vocabulaire sont à noter cependant entre « l'intégrale qui définit I_n converge » et « la suite (I_n) converge ».

Partie B

4. (a) De nombreux candidats se lancent dans une étude de fonctions, mais n'aboutissent pas ou « passent en force » en conclusions abusives, avec des études de signes non menées ou mal menées. En particulier, plusieurs candidats justifient la réponse par un calcul de limite (soit en 0, soit en 1) ou par une comparaison de fonctions au voisinage de 0.
Peu pensent à réduire au même dénominateur l'expression au centre de l'inégalité.

(b) La formule d'intégrations par parties est le plus souvent bien connue. Cependant elle est souvent utilisée sur l'intervalle $]0, 1]$. La justification par croissance comparée de la limite est peu donnée.

(c) Dans cette question, il est attendu une écriture correcte des inégalités permettant ensuite d'appliquer le théorème d'encadrement.
Cependant la manipulation des inégalités est assez hasardeuse. En particulier, certains pensent que les inégalités obtenues à l'aide des questions précédentes et celles obtenues après intégration sont équivalentes. La mention de la convergence des intégrales est indispensable ici.
Beaucoup terminent leur raisonnement et leur calcul en additionnant $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ uniquement sur les membres de droite des inégalités. Il est alors impossible de conclure par le théorème d'encadrement : les limites des membres aux extrémités des inégalités ne sont pas égales.
Le théorème d'encadrement n'est pas toujours correctement appliqué : Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \ln(t)dt + \frac{1}{(n+1)^2}$, on en déduit que $-1 \leqslant \displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n \leqslant -1$ ou $-1 \leqslant J_n \leqslant -1$.

5. (a) Pour prouver la première inégalité $\ln(x) \leqslant x$, beaucoup ont étudié une fonction, mais l'étude n'est pas toujours menée jusqu'au bout. Quelques candidats se contentent d'étudier le signe de la dérivée sans s'intéresser à la valeur en 1.
Quelques candidats utilisent correctement la concavité de la fonction ln.
Cependant, les opérations sur les inégalités sont peu soignées : on précise trop rarement le signe des quantités multiplicatives.

(b) Cette question, quand elle est traitée, est plutôt correctement traitée, même si la convergence des intégrales est encore insuffisamment précisée.

(c) Cette question est en général plutôt bien traitée, la première partie est très souvent abordée, même par des candidats n'ayant pas traité les questions précédentes. La limite de I_n donne lieu à des réponses parfois surprenantes !

Partie C

6. Dans cette question, le résultat du changement de variable étant donné par l'énoncé, le correcteur a été particulièrement attentif à la vérification des hypothèses de ce théorème, à la gestion des signes et de l'ordre des bornes, ainsi qu'au calcul de la dérivée d'une fonction composée. Ces différents points ont posé problème à de nombreux candidats ou ont fait l'objet d'entourloupes peu appréciées.

7. (a) On peut s'étonner du nombre important de candidats qui ne connaissent pas la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1 ou confondent avec la fonction de répartition.
   Il arrive également que la densité soit bien donnée en deux morceaux, mais que les morceaux ne soient pas les bons ; Pour certains, x est plus petit ou plus grand que 1, pour d'autres $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = e^{-x}$ si $x \geqslant 1$... et « vide juridique » entre 0 et 1. Là encore, les inégalités larges ou strictes sont mal gérées : 0 n'a pas d'image ou en a deux différentes.

   (b) Le théorème de transfert semble parfois mal connu et est très souvent appliqué maladroitement. Quelques uns tentent de déterminer une densité de Y_n et perdent du temps sans aboutir dans leurs calculs.
   Quand le théorème de transfert est appliqué à peu près correctement, beaucoup affirment que

$$\int_0^{+\infty} -\frac{u}{1+e^{-nu}} e^{-u} \mathrm{d}\, u = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^n} \mathrm{d}\, t$$

   en posant $y = 0$ dans la question 6.
   L'existence de l'espérance est très peu évoquée et encore moins prouvée. La « preuve » est souvent donnée uniquement sous la forme : X admet une espérance donc Y_n aussi. Certains pensent utiliser une certaine linéarité de l'espérance pour obtenir « $E\left(\frac{-X}{1+e^{-nX}}\right) = \frac{-E(X)}{1+e^{-nE(X)}}$ ».

8. Cette question d'informatique fut plutôt bien réalisée, mais en général de manière incomplète : l'une des instructions au moins est erronée.
   Des erreurs de syntaxe se retrouvent souvent, comme des oublis de parenthèses ou de $*$ ou encore dans l'intervalle pour la boucle for qui est souvent faux : « for $i = 1 : n$ » ou « for $i = 1 : 2$ ».
   La fonction exponentielle est confondue avec le nombre e, ce qui se traduit ici par l'apparition d'un « chapeau » incongru à côté de « exp ».

9. (a) Très peu de candidats répondent à cette question et quand ils le font au lieu d'un énoncé propre, une phrase explicative de l'énoncé est proposée.
   Ceux(assez rares) qui tentent d'écrire le théorème proposent souvent des hypothèses imprécises ou incomplètes.

   (b) Les candidats voient bien la moyenne mais pas le lien avec J_n.

CONCOURS ECRICOME PREPA

Exercice 3

Partie A

1. Cette question portant sur des exemples d'études d'événements et permettant d'appréhender l'énoncé est en général bien comprise mais rédigée très maladroitement et souvent de manière incorrecte.
   En particulier les parenthèses souvent omises et indispensables pourtant dans l'écriture de $[X = 4]$, les probabilités et les événements sont trop souvent confondus et des écritures de type « $P(F_1) \cap P(P_2)$ » sont trop souvent rencontrées ; les indices des événements ne sont pas toujours adaptés aux événements considérés, ainsi l'indice reste souvent égal à k.
   L'argument d'incompatibilité pour le calcul de $P(X = 4)$ est indispensable et trop souvent oublié.
2. De nombreux candidats ne saisissent pas le sens de la question et soit recopient l'énoncé soit se contentent de traduire les événements en français. Ici à nouveau, l'argument d'incompatibilité est indispensable.
3. (a) Cette question est assez souvent abordée, mais trop souvent la deuxième partie de cette question est incorrecte : « else pile=pile ».
   (b) Cette question est peu traitée et quand elle l'est, les programmes fournis ne conviennent pas même quand ils sont inspirés des programme de l'exercice 2.
   (c) La conjecture a été souvent bien vue mais avec une expression souvent maladroite. Elle ne fait pas toujours référence à la variable aléatoire X: « en moyenne, le premier double-pile vient après 6 lancers », ou encore « X converge vers 6 », ou encore « en moyenne, en 200 lancers, on obtient 6 fois deux Pile consécutifs ».

Partie B

4. (a) Une bonne partie des candidats voit bien la réunion d'événements à écrire, une autre se lance dans un « baratin » interminable... Quelques candidats ressentent le besoin de préciser que les événements ne sont pas incompatibles pour s'autoriser à employer la formule du crible.
   (b) Cette question est en général assez mal traitée, trop de candidats se contentent de paraphraser la relation sans l'ombre du commencement d'une explication.
   (c) Quelques bonnes démarches, même si l'indépendance et l'incompatibilité sont rarement rappelées. Mais dans certaines copies, les résolutions proposées sont très farfelues.
5. Dans cette question, toute affirmation doit être soigneusement justifiée. Le signe de $u_{n+1} - u_n$ (ou plutot de $1 - u_{n-2}$) n'est pas toujours justifié. Beaucoup trop de candidats pensent qu'une suite croissante et majorée par 1 converge vers 1 ou que « puisque u_n est une probabilité, elle tend forcément vers 1 ».
6. Cette question est peu abordée et peu réussie. Quand elle est traitée, la rigueur attendue n'est pas au rendez-vous et le théorème de limite monotone n'est pas connu. Trop de candidats n'écrivent pas correctement les complémentaires: $\overline{\bigcup_{n=2}^{+\infty} U_n}$ est trop souvent remplacé par $\bigcup_{n=2}^{+\infty} \overline{U_n}$.
   Parfois encore, on lit $\overline{[X = -1]} = U_n$, puis la réunion apparaît soudain miraculeusement.

Partie C

7. Cette question est en général bien traitée, même si la gestion des calculs est assez maladroite : de nombreux candidats traînent des « -1 » jusqu'au bout.
8. Cette question est peu traitée et très rarement de manière satisfaisante.

9. Cette question portant sur une simple récurrence a rebuté de nombreux candidats. Ils ont souvent clairement tenté de traiter la question mais les calculs nécessaires à l'initialisation n'ont pas été menés jusqu'au bout. L'hérédité plus simple n'a alors même pas été tentée.
10. Cette question est assez peu traitée. Et quand elle l'est, les candidats utilisent la question précéndente et non la définition de la suite (S_n). À noter que si la suite (v_n) est décroissante, on ne peut pas en déduire directement la monotonie de la suite (nv_n). La majoration est souvent affirmée, rarement démontrée.
11. Cette question est en général bien traitée quand elle est abordée.
    Cependant, une certaine confusion existe entre la série et les sommes partielles. Il est bon de préciser que la suite (S_n) converge et non le réel $\sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$ converge et vaut $E(X)$.
12. (a) Cette question est peu abordée. Certains parlent de la convergence de (S_n) mais pas de la convergence de (v_n). D'autres ont tenté de chercher la monotonie de la suite (nv_n) mais se sont trompés dans l'écriture du terme de rang $(n + 1)$.
    (b) Cette question est très peu traitée, et avec très peu de réussite. La contradiction recherchée n'a pas été vue.
    (c) De rares candidats ont répondu à la question et en général leur copie était d'un très bon niveau.