2021

ANNALES

Mathématiques S

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

Option Scientifique

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Deux exercices d'application des connaissances de base
- Un problème faisant largement appel aux probabilités.

ÉVALUATION

- Les deux exercices sont de valeur sensiblement égale dans le barème.
- 12 à 14 points sont destinés au problème.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. ◇ $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $A^3 = -3A$.

   ◇ ⋆ Ainsi, $X^3+3X = X(X^2+3)$ est un polynôme annulateur de A. Les valeurs propres de A sont parmi les racines de $X(X^2+3)$. Donc $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{0\}$.

   ⋆ Réciproquement, remarquons que $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Donc 0 est une valeur propre de A. Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$.

   ◇ Par ailleurs les deux premières colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Alors d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}(f) \leqslant 1$.
   Or $\mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big) \subset \mathrm{Ker}(f)$. Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$.
   Finalement A est une matrice de taille 3×3 et a un seul sous-espace propre, de dimension 1.
   Ainsi, A n'est pas diagonalisable.

2. J et S sont symétriques réelles. Donc J et S sont diagonalisables par le théorème spectral.

$$JS = SJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Comme S est une matrice de taille 3×3 et comme S a trois valeurs propres deux à deux distinctes, les trois sous-espaces propres de S sont de dimension 1.
   Soit λ une valeur propre de S et X un vecteur propre associé : $\mathrm{Ker}(X-\lambda I_3) = \mathrm{Vect}(X)$.
   Alors $SX = \lambda X$, donc $SJX = JSX = J(\lambda X) = \lambda JX$. Ainsi, $JX \in \mathrm{Ker}(X-\lambda I_3) = \mathrm{Vect}(X)$.
   Comme $X \neq 0$, X est un vecteur propre pour J.
   Ainsi, tout vecteur propre de S est un vecteur propre de J.

4. Comme S est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ composée de trois vecteurs propres de S, associés respectivement aux valeurs propres 0, $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.
   Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B}$.
   Alors $P^{-1}SP = \mathrm{Diag}(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$.
   Or $\mathscr{B}$ est aussi une base de vecteurs propres pour J d'après la question précédente. Donc $P^{-1}JP$ est diagonale. Ainsi, $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ sont diagonales.

Partie 2 : Étude des matrices magiques

5. L'application qui à une matrice associe un de ses coefficients est une forme linéaire (forme linéaire coordonnée). Donc ℓ_1 est une somme de formes linéaires. Ainsi ℓ_1 est une forme linéaire.

6. $\mathcal{K}_n$ est le noyau de la restriction de ℓ_1 à $\mathscr{E}_n$, qui est une forme linéaire.
Ainsi, $\mathcal{K}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}_n$

7. En transposant une matrice, les colonnes deviennent des lignes et vice-versa. Ainsi, si $1 \leqslant i \leqslant n$, $\ell_i({}^tM) = c_i(M)$ et $c_i({}^tM) = \ell_i(M)$. De même, les éléments diagonaux sont inchangés et les éléments sur l'anti-diagonale sont renversés, donc $d_1({}^tM) = d_1(M)$ et $d_2({}^tM) = d_2(M)$.
Si $\ell_1(M) = \cdots = \ell_n(M) = c_1(M) = \cdots = c_n(M) = d_1(M) = d_2(M)$, alors $\ell_1({}^tM) = \cdots = \ell_n({}^tM) = c_1({}^tM) = \cdots = c_n({}^tM) = d_1({}^tM) = d_2({}^tM)$. Ainsi, si M est magique, ${}^tM$ l'est aussi.

8. Remarquons que $J_n \in \mathscr{E}_n$ et que $s(J_n) = n$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par linéarité de s : $s(M - \lambda J_n) = s(M) - \lambda s(J_n) = s(M) - n\lambda$.
Ainsi, $s(M - \lambda J_n) = 0$ si et seulement si $\lambda = \dfrac{s(M)}{n}$.
Ainsi, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $M - \lambda J_n \in \mathcal{K}_n$. Et $\lambda = \dfrac{s(M)}{n}$.

9. $$MW = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} + \cdots + m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,1} + \cdots + m_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(M) \\ \vdots \\ \ell_n(M) \end{pmatrix}.$$
Or $M \in \mathscr{E}_n$. Donc $MW = s(M)W$. Or $W \neq 0$.
Ainsi W est un vecteur propre de M, associé à la valeur propre $s(M)$.

Partie 3 : Étude du cas où n = 3

10. Clairement $A, J, S \in \mathscr{E}_3$. Et $s(A) = s(S) = 0$ et $s(J) = 3$.

11. Par analyse-synthèse. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Analyse Supposons qu'il existe soit $M_1 \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ et $M_2 \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M = M_1 + M_2$.
Alors par linéarité de la transposition ${}^tM = {}^tM_1 + {}^tM_2 = -M_1 + M_2$. Par demi-somme $M_2 = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$ et par demi-différence $M_1 = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$.

Synthèse Posons $M_2 = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $M_1 = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$.
Alors $M = M_1 + M_2$, puis ${}^tM_2 = \dfrac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \dfrac{1}{2}({}^tM + M) = M_2$ et ${}^tM_1 = \dfrac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \dfrac{1}{2}({}^tM - M) = -M_1$. Ainsi, M_1 est symétrique et M_2 est anti-symétrique.

Il existe donc bien un unique couple $(M_1, M_2) \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ tel que $M = M_1 + M_2$.

Et $M_1 = \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$ et $M_2 = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM)$.

12. (a) Comme $M \in \mathscr{E}_3$, d'après la question 7, ${}^tM \in \mathscr{E}_3$ et $s({}^tM) = s(M) = 0$.
Donc ${}^tM \in \mathcal{K}_3$.
Comme $\mathcal{K}_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}_3$, il est stable par combinaison linéaire. Ainsi, $M_1, M_2 \in \mathcal{K}_3$.

(b) Comme M_1 est antisymétrique, il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $S(M_1) = 0$, alors $a - c = a + b = 0$. Donc $a = c = -b$. Ainsi $M_1 = aA$.
Comme M_2 est symétrique, il existe $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Or $s(M_2) = 0$.

Donc $\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+d+e &= 0 \\ c+e+f &= 0 \\ a+d+f &= 0 \\ 2c+d &= 0 \end{cases}$. Alors en sommant les 4 premières lignes $a+b+c+d+e+f = 0$.

Donc en utilisant la première ligne, $d+e = f = 0$, puis en soustrayant avec la troisième ligne $c-d = 0$.
Donc d'après la dernière ligne $c = d = 0$.
Alors la première ligne devient $a = -b$, la deuxième ligne $b = -e$, puis dans la troisième ligne $e = -f$.
Ainsi $c = d = 0$, puis $a = e = -f = -b$.
Et de tels réels vérifient bien le système. Donc il existe un réel β tel que $M_2 = \beta S$.

13. D'après la question 12, pour toute matrice M de $\mathcal{K}_3$, il existe deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta S$.
Donc la famille (A, S) est une famille génératrice de $\mathcal{K}_3$.
Or A et S ne sont pas proportionnelles. Donc la famille (A, S) est une famille libre.
Ainsi (A, S) est une base de $\mathcal{K}_3$. D'après la question 8, pour tout matrice M de $\mathscr{E}_3$, il existe un réel λ tel que $M - \lambda J \in \mathcal{K}_3$.
Donc d'après la question précédente, il existe des réels α et β tels que $M - \lambda J = \alpha A + \beta S$.
Donc $M = \lambda J + \alpha A + \beta S$.
Ainsi la famille (A, S, J) est une famille libre de $\mathscr{E}_3$.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aA + bS + cJ = 0$.
Donc en regardant la coefficient de la deuxième ligne et deuxième colonne $c = 0$, puis par liberté de (A, S), $a = b = 0$.
Donc la famille (A, S, J) est libre.
Ainsi (A, J, S) est une base de $\mathscr{E}_3$.

14. ⋆ D'après la question 4, $P^{-1}JP$ et $P^{-1}SP$ sont diagonales, donc pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $P^{-1}(xJ + yS)P$ est diagonale. Ainsi, $\mathrm{Vect}(J, S) \subset \Delta$.

⋆ Soit $M \in \Delta$, alors $M \in \mathscr{E}_3$, donc il existe $x, y, z \in \mathbb{R}$ vérifiant $M = xA + yJ + zS$.
Si $x \neq 0$, Alors $A = \dfrac{1}{x}(M - yJ - zS)$. Donc $P^{-1}AP = \dfrac{1}{x}(P^{-1}MP - yP^{-1}JP - zP^{-1}SP)$ est diagonale, ce qui contredit la question 1 de la première partie. Ainsi, $x = 0$, donc $M \in \mathrm{Vect}(J, S)$.

Ainsi par double inclusion, $\Delta = \mathrm{Vect}(J, S)$.

EXERCICE 2

1. Les fonctions $(x,y) \longmapsto -(x^2+y^2)$ et $(x,y) \longmapsto x^2+y$ sont polynomiales, donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc par composition $(x,y) \longmapsto \exp(-(x^2+y^2))$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

   Ainsi par produit f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

   Et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\partial_1 f(x,y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+y)e^{-(x^2+y^2)} = 2x(1-x^2-y)e^{-(x^2+y^2)},$$
$$\partial_2 f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+y)e^{-(x^2+y^2)} = (1-2y^2-2yx^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

2. (x,y) est point critique de f si et seulement si $\partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(x,y) = 0$.
   Or $\partial_1 f(x,y) = 0$ si et seulement si ($x = 0$ ou $x^2+y = 1$).
   — Si $x = 0$, alors $\partial_2 f(x,y) = (1-2y^2)e^{-y^2}$, qui s'annule donc en $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
   — Si $x^2+y = 1$, alors $\partial_2 f(x,y) = (1-2y)e^{-(x^2+y^2)}$, qui s'annule donc pour $y = \dfrac{1}{2}$. Donc $x^2 = \dfrac{1}{2}$, ce qui équivaut à $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   Réciproquement si $(x,y) \in \left\{\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$, alors $\partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(x,y) = 0$.

   Ainsi, f possède quatre points critiques : $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$.

3. $\partial^2_{1,2} f\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$. Or f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc $\partial^2_{1,2} f\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \partial^2_{2,1} f\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   Ainsi $\nabla^2 f\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est diagonale.
$$\partial^2_{1,1} f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} > 0$$
$$\partial^2_{2,2} f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}e^{-1/2} < 0.$$

   Donc $\nabla^2 f\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.

   Ainsi, f n'admet pas d'extremum local en $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4. De même, $\nabla^2 f\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est diagonale, donc

$$\partial^2_{1,1} f\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2} > 0$$
$$\partial^2_{2,2} f\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}e^{-1/2} > 0.$$

Ainsi, le spectre de $\nabla^2 f\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a deux valeurs propres strictement positives.

Ainsi, f admet un minimum local en $\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5.
$$\partial^2_{1,1} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right) = -2e^{-3/4}, \quad \partial^2_{2,2} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right) = -3e^{-3/4}, \quad \partial^2_{1,2} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2}e^{-3/4}.$$

Comme f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, par le théorème de Schwarz, $\partial^2_{1,2} f = \partial^2_{2,1} f$, donc $H = -e^{-3/4}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

Comme H est symétrique et réelle, par le théorème spectral, H est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Déterminons les valeurs propres de la matrice $H' = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$.

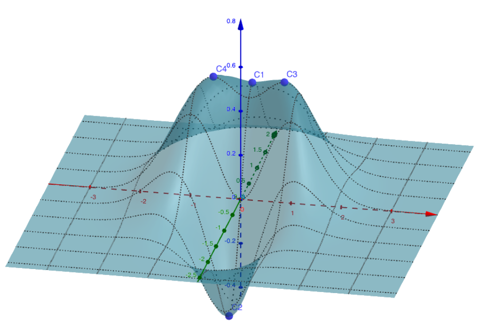
Comme H' est diagonalisable. Notons λ, μ ses deux valeurs propres réelles, $Tr(H') = \lambda + \mu = 5$.

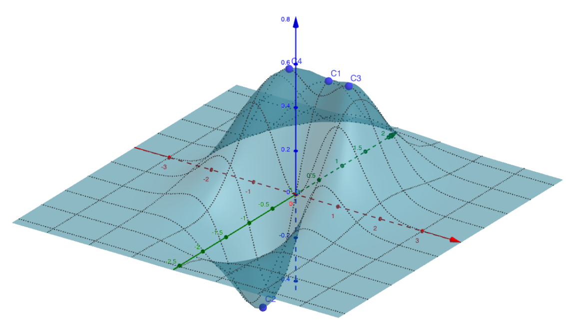
Or $(H')^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 11 \end{pmatrix} = 5H' - 4I_2$.

Ainsi, un polynôme annulateur de H' est $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$. Donc $\mathrm{Sp}(H') \subset \{1,4\}$.
Or $Tr(H') = 5$, donc $\mathrm{Sp}(H') = \{1,4\}$.

Ainsi, les valeurs propres de H sont $-e^{-3/4} < 0$ et $-4e^{-3/4} < 0$.

Comme $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$ est un point critique de f, donc f admet un maximum local en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$.





6. (a) Remarquons que $0 \leqslant |y| \leqslant \max(|x|,|y|)$, et $|x|^2 \leqslant \max(|x|,|y|)^2$.
Alors Par l'inégalité triangulaire et par positivité de l'exponentielle:

$$|f(x,y)| = |x^2+y|e^{-(x^2+y^2)} \leqslant (|x|^2+|y|)e^{-(x^2+y^2)} \leqslant (\max(|x|,|y|)^2+\max(|x|,|y|))e^{-(x^2+y^2)}.$$

Et $x^2+y^2 \geqslant \max(|x|,|y|)^2$, donc $-(x^2+y^2) \leqslant -\max(|x|,|y|)^2$, donc par croissance de l'exponentielle : $0 < e^{-(x^2+y^2)} \leqslant \exp(-\max(|x|,|y|)^2)$.
Or $\max(|x|,|y|)^2+\max(|x|,|y|) \geqslant 0$. Donc $|f(x,y)| \leqslant (\max(|x|,|y|)^2+\max(|x|,|y|))e^{-\max(|x|,|y|)^2}$.

(b) Par croissances comparées, $(u^2+u)e^{-u^2} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par définition de la limite il existe $r>0$ tel que, si $u \geqslant r$, $0 \leqslant (u^2+u)e^{-u^2} \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-3/4}$..
En particulier $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\max(|x|,|y|) \geqslant r$, $(\max(|x|,|y|)^2+\max(|x|,|y|))e^{-\max(|x|,|y|)^2} \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-3/4}$. Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\max(|x|,|y|) \geqslant r$, alors $0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-3/4}$.

(c) $\mathcal{K}$ est le carré de sommets de coordonnées (r,r), $(r,-r)$, $(-r,-r)$ et $(-r,r)$.

Or $(x,y) \mapsto \max(|x|,|y|)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{K}$ est l'image réciproque de $[0,r]$, donc $\mathcal{K}$ est bien un fermé de $\mathbb{R}^2$.

(d) Pour $x=0$ et $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $f(x,y) = \pm\dfrac{1}{2}e^{-1/4}$, donc par croissance stricte de l'exponentielle

$$|f(x,y)| = \frac{1}{2}e^{-1/4} > \frac{1}{2}e^{-3/4}.$$

Ainsi, $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathcal{K}$ et $\left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \in \mathcal{K}$.
Pour $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = \dfrac{1}{2}$, on a $f(x,y) = e^{-3/4}$, donc $|f(x,y)| = e^{-3/4} > \dfrac{1}{2}e^{-3/4}$.
Donc, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right) \in \mathcal{K}$ et $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right) \in \mathcal{K}$. Ainsi, les points critiques de f sont dans $\mathcal{K}$.
Notons $C_1 = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C_2 = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $C_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $C_4 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$ les quatre points critiques de f.
Remarquons que $f(C_2) < 0$ et que $f(C_3) = f(C_4) > 0$.
D'après la question 6b) si $(x,y) \notin \mathcal{K}$, alors $f(C_2) < 0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant f(C_3) = f(C_4)$.
Comme f est continue sur le fermé-borné (borné par définition) $\mathcal{K}$, alors f admet un minimum sur $\mathcal{K}$, ainsi qu'un maximum. Ces extremums ne peuvent se trouver au bord de $\mathcal{K}$, par l'inégalité précédente.
Ainsi, f atteint un minimum et un maximum sur l'ouvert $\overset{\circ}{\mathcal{K}} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|,|y|) < r\right\}$, donc ces lieux sont des points critiques de f, donc sont parmi C_1, C_2, C_3, C_4. Or C_1 n'est pas le lieu d'un extremum de f.

Ainsi, f atteint un minimum global en $C_2 = \left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et un maximum global en $C_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $C_4 = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$.

7. Si f admettait un extremum sous la contrainte $\phi(x,y) = x^2 + y^2 = 1$ en $(1,0)$, alors le gradient de f serait proportionnel à $\nabla\phi(1,0) = (2,0)$. Cela ne semble pas être le cas : le gradient de f semble être plutôt proportionnel à $(0,1)$.

   Ainsi, f ne semble pas atteindre un extremum sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ en $(1,0)$.

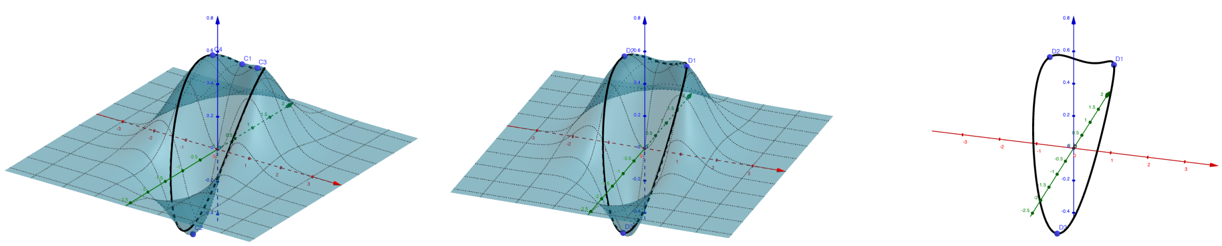
8. Remarquons que $\forall y \in \mathbb{R},\ g(y) = -y^2 + y + 1 = -\left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4}$.

   Ainsi, g atteint son maximum sur $[-1,1]$ en $y = \dfrac{1}{2}$ et son minimum $y = -1$.

9. Comme $x^2 + y^2 = 1$, alors $f(x,y) = g(y)e^{-1}$.

   Ainsi, sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$, f admet un maximum pour $y = \dfrac{1}{2}$, donc pour $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et un minimum pour $y = -1$, donc pour $x = 0$.

   Sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$, f atteint donc un maximum en les points $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, ainsi qu'un minimum en $(0,-1)$. En ces points, sur la figure 1 le gradient de f est bien orthogonal au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, donc proportionnel au gradient de cette contrainte.



PROBLÈME

PARTIE 1 : Estimateur du maximum de vraisemblance

1. (a)

```
function V = sim_V(n,a)
    V = max(grand(n,1,"unf",0,a));
endfunction
```

(b) L'estimateur semble être convergent (mais aussi la suite (V_n) semble être croissante).

2. (a) $\forall t \in \mathbb{R},\ F_{X_1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{t}{a} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant a \\ 1 & \text{si } a < t \end{cases}.$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \mathbb{P}(V_n \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant t) \\ &= \mathbb{P}\big([X_1 \leqslant t] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant t]\big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant t) \times \mathbb{P}(X_2 \leqslant t) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \leqslant t) \qquad \text{par indépendance des variables aléatoires} \\ &= F_{X_1}(t)^n \qquad \text{car les } X_i \text{ ont même loi} \end{aligned}$$

Ainsi $F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{t^n}{a^n} & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant a \\ 1 & \text{si} \quad t > a \end{cases}$

(c) F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, a\}$. Ainsi, V_n est à densité.

$$\text{Et } \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0, a\},\ F_n'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ n\dfrac{t^{n-1}}{a^n} & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant a \\ 0 & \text{si} \quad t > a \end{cases}$$

Une densité de V_n est donc $\varphi_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ n\dfrac{t^{n-1}}{a^n} & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant a \\ 0 & \text{si} \quad t > a \end{cases}$

3. φ_n est nulle en dehors de $[0, a]$ et continue sur $[0, a]$, ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi_n(t)\mathrm{d}t$ converge. Donc V_n admet une

espérance.

$$\begin{aligned}
\text{Et } E[V_n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a t\varphi_n(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{a^n}\int_0^a t^n\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{a^n}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^a
\end{aligned}$$

Donc $E[V_n] = a\dfrac{n}{n+1}$. Comme $E[V_n] \neq a$, V_n est un estimateur biaisé.

4.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(|V_n - a| \geqslant \varepsilon\big) &= \mathrm{P}\Big([V_n - a \leqslant -\varepsilon] \cup [V_n - a \geqslant \varepsilon]\Big) \\
&= \mathrm{P}\big([V_n \leqslant a-\varepsilon] \cup [V_n \geqslant a+\varepsilon]\big) \\
&= \mathrm{P}(V_n \leqslant a-\varepsilon) + \mathrm{P}(V_n \geqslant a+\varepsilon) \qquad \text{car } [V_n \leqslant a-\varepsilon] \cap [V_n \geqslant a+\varepsilon] = \varnothing \\
&= \mathrm{P}(V_n \leqslant a-\varepsilon) \qquad \text{comme } a+\varepsilon > a,\ \mathrm{P}(V_n \geqslant a+\varepsilon) = 0 \\
&= F_n(a-\varepsilon) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \varepsilon > a \\ \dfrac{(a-\varepsilon)^n}{a^n} & \text{si} \quad 0 < \varepsilon \leqslant a \end{cases}
\end{aligned}$$

Si $0 < \varepsilon \leqslant a$, alors $0 \leqslant \dfrac{a-\varepsilon}{a} < 1$, donc $\dfrac{(a-\varepsilon)^n}{a^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\big(|V_n - a| \geqslant \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, V_n est un estimateur convergent.

5. ◇ Pour tout réel t, $\mathbb{P}\big(n(a-V_n) \leqslant t\big) = \mathbb{P}\left(a - V_n \leqslant \dfrac{t}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(V_n < a - \dfrac{t}{n}\right)$.

Comme V_n est à densité, $\mathbb{P}\left(V_n = a - \dfrac{t}{n}\right) = 0$. Donc $\mathbb{P}(n(a-V_n) \leqslant t) = 1 - F_n\left(a - \dfrac{t}{n}\right)$.

◇ **Si** $t \leqslant 0$, alors $\mathbb{P}(n(a-V_n) \leqslant t) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(n(a-V_n) \leqslant t) = 0$.

Si $t < 0$, alors comme $\dfrac{t}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe alors un entier N tel que $\forall n \geqslant N$, $0 \leqslant a - \dfrac{t}{n} \leqslant a$, donc

$$\mathbb{P}\big(n(a-V_n) \leqslant t\big) = 1 - \frac{1}{a^n}\left(a - \frac{t}{n}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{t}{an}\right)^n$$

Or $\left(1 - \dfrac{t}{an}\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1 - \dfrac{t}{an}\right)\right]$.

Et $n\ln\left(1 - \dfrac{t}{an}\right) = n\left(-\dfrac{t}{an} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -\dfrac{t}{a} + o(1)$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{t}{an}\right) = -\frac{t}{a}$.

Alors par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{an}\right)^n = \exp\left(\frac{-t}{a}\right)$.

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\big(n(a-V_n)\leqslant t\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\leqslant 0 \\ 1-e^{-\frac{t}{a}} & \text{si } t<0 \end{cases}$.

Or la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$ est $t\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t\leqslant 0 \\ 1-e^{-\frac{t}{a}} & \text{si } t<0 \end{cases}$.

Ainsi, $n(a-V_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{E}\left(\frac{1}{a}\right)$.

6. Soit $\alpha\in]0,1[$. Notons X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $1/\alpha$. Notons z le $(1-\alpha)$-quantile de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{a}$:

$$\mathbb{P}(X\leqslant z) = 1-\alpha \iff 1-e^{-z/a} = 1-\alpha \iff \alpha = e^{-z/a} \iff z = -a\ln(\alpha)$$

Par la question précédente,

$$\mathbb{P}(n(a-V_n)\leqslant z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X\leqslant z) = 1-\alpha$$

Or, pour n tel que $n>-\ln(\alpha)$, $\mathbb{P}(n(a-V_n)\leqslant z) = \mathbb{P}\left(a\leqslant V_n+\frac{z}{n}\right)$.

Comme $V_n\leqslant a$, alors $\mathbb{P}\left(V_n\leqslant a\leqslant V_n+\frac{z}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha$.

Ainsi, $\left[V_n ; V_n+\frac{z}{n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour V_n.

7. (a) V_n est bornée, donc, V_n admet un moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} E[V_n^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^a t^2\phi_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{a^n}\int_0^a t^{n+1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{a^n}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_{t=0}^a \\ &= a^2\frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $E(V_n^2) = a^2\frac{n}{n+2}$.

(b) Le risque quadratique est

$$\begin{aligned} r(V_n) &= E\left[(V_n - a)^2\right] \\ &= E\left[V_n^2 - 2aV_n + a^2\right] \\ &= E\left[V_n^2\right] - 2aE\left[V_n\right] + a^2 \\ &= a^2 \frac{n}{n+2} - a^2 \frac{2n}{n+1} + a^2 \\ &= a^2 \frac{n(n+1) - 2n(n+2) + (n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

Donc $r(V_n) = \dfrac{2a^2}{(n+1)(n+2)}$.

Comme le risque quadratique tend vers 0, on retrouve que l'estimateur est convergent.

Partie 2 : Méthode des moments

8.
```
function M = simulation_M(n,a)
    M = 2*sum(grand(n,1,"unf",0,a)) / n;
endfunction
```

9. Comme les X_i sont de même loi, par linéarité de l'espérance :

$$E\left[\overline{X}_n\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = E[X_1].$$

Une variable de loi uniforme sur $[0, a]$ a une espérance de $\dfrac{a}{2}$.

Ainsi, $E\left[\overline{X}_n\right] = \dfrac{a}{2}$, donc $E[M_n] = a$ et M_n est sans biais.

Comme les variables aléatoires X_i sont indépendantes, $V\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$.

Comme les variables aléatoires X_i ont même loi $V\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{1}{n} V(X_1)$.

Une variable de loi uniforme sur $[0, a]$ a une variance de $\dfrac{a^2}{12}$.

Ainsi, $V\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{a^2}{12n}$.

10. Comme M_n est sans biais, $r(M_n) = V(M_n) = 4V\left(\overline{X}_n\right) = \dfrac{a^2}{3n}$.

Comme le risque quadratique tend vers 0, M_n est convergent.

11. Comme les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance $\frac{a}{2}$ et d'écart-type $\frac{a}{2\sqrt{3}}$, par le théorème central-limite :

$$\left(\frac{\bar{X}_n - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2\sqrt{3}}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}(0,1).$$

Or $\sqrt{n}(M_n - a) = 2\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{a}{2}\right) = \frac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2\sqrt{3}}}\right)$.

Ainsi, $\sqrt{n}(M_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} \mathscr{N}\left(0, \frac{a^2}{3}\right)$.

12. Soit X suit la loi $\mathscr{N}\left(0, \frac{a^2}{3}\right)$, alors $\frac{\sqrt{3}}{a}X$ suit la loi $\mathscr{N}(0,1)$.

Soit z le $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ quantile de la loi normale centrée-réduite.

Alors $1 - \alpha = \mathbb{P}\left(-z \leqslant \frac{\sqrt{3}}{a}X \leqslant z\right) = \mathbb{P}\left(-z\frac{a}{\sqrt{3}} \leqslant X \leqslant z\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

Donc $\mathbb{P}\left(-z\frac{a}{\sqrt{3}} \leqslant \sqrt{n}(M_n - a) \leqslant z\frac{a}{\sqrt{3}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \alpha$.

Or,

$$\mathbb{P}\left(-\frac{az}{\sqrt{3}} \leqslant \sqrt{n}(M_n - a) \leqslant \frac{az}{\sqrt{3}}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{az}{\sqrt{3n}} \leqslant M_n - a \leqslant \frac{az}{\sqrt{3n}}\right) = \mathbb{P}\left(M_n - \frac{az}{\sqrt{3n}} \leqslant a \leqslant M_n + \frac{az}{\sqrt{3n}}\right)$$

Pour tout entier naturel n tel que $1 - \frac{z}{\sqrt{3n}} > 0$, on a alors :

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{1 + \frac{z}{\sqrt{3n}}} \leqslant a \leqslant \frac{M_n}{1 - \frac{z}{\sqrt{3n}}}\right) = \mathbb{P}\left(M_n - z\frac{a}{\sqrt{3n}} \leqslant a \leqslant M_n + z\frac{a}{\sqrt{3n}}\right).$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n}{1 + \frac{z}{\sqrt{3n}}} \leqslant a \leqslant \frac{M_n}{1 - \frac{z}{\sqrt{3n}}}\right) = 1 - \alpha$.

Ainsi $\left[\frac{M_n}{1 + \frac{z}{\sqrt{3n}}} ; \frac{M_n}{1 - \frac{z}{\sqrt{3n}}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour a.

Le meilleur intervalle de confiance serait celui qui a l'amplitude la plus petite.
Pour l'intervalle de la question 6 :

$$\frac{nV_n}{n + \ln(\alpha)} - V_n = \left(\frac{n}{n + \ln(\alpha)} - 1\right) V_n = \frac{-\ln(\alpha)V_n}{n + \ln(\alpha)}$$

Donc $\frac{nV_n}{n + \ln(\alpha)} - V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-a\ln(\alpha)}{n}$.

Pour l'intervalle de la question 12:

$$\frac{M_n}{1-\frac{z}{\sqrt{3n}}}-\frac{M_n}{1+\frac{z}{\sqrt{3n}}}=\sqrt{3n}\ M_n\left(\frac{1}{\sqrt{3n}-z}-\frac{1}{\sqrt{3n}+z}\right)=\frac{2z\sqrt{3n}\ M_n}{3n-z^2}$$

Donc $\displaystyle\frac{M_n}{1-\frac{z}{\sqrt{3n}}}-\frac{M_n}{1+\frac{z}{\sqrt{3n}}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2za}{\sqrt{3n}}$.

13. Asymptotiquement, $r(V_n)=\underset{n\to+\infty}{o}(r(M_n))$.

Sur les graphiques, les courbes de V_n semblent être bien plus proches de a que celles de M_n.

Partie 3 : Consistance de ces estimateurs

14. (a) Soit t un réel de $]a,2a]$.

$[V_n\leqslant t]=\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}[X_k\leqslant t]$.

Par indépendance des variables aléatoires X_k, $\mathbb{P}(V_n\leqslant t)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k\leqslant t)$.

Or $t>a$ et pour tout entier k de $[\![2,n]\!]$, X_k suit une loi uniforme sur $[0,a]$.
Donc $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $\mathbb{P}(X_k\leqslant t)=1$.
Donc $\mathbb{P}(V_n\leqslant t)=\mathbb{P}(X_1\leqslant t)$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall t\in]a,2a]$, $\mathbb{P}(V_n\leqslant t)=\dfrac{t}{2a}$.

(b) **Si** $t<0$, alors $\mathbb{P}(V_n\leqslant t)=0$.

Si $0\leqslant t\leqslant a$ Par indépendance mutuelle des X_k, on a :

$\mathrm{P}(\mathrm{V}_n\leqslant t)=\mathbb{P}([X_1\leqslant t]\cap\cdots\cap[X_n\leqslant t])=\mathbb{P}(X_1\leqslant t)\ldots\mathbb{P}(X_n\leqslant t)$.
$Or\mathrm{P}(\mathrm{X}_1\leqslant t)=\dfrac{t}{2a}$ et si $k\geqslant 2$, $\mathbb{P}(X_i\leqslant t)=\dfrac{t}{a}$.
Donc $\mathbb{P}(V_n\leqslant t)=\dfrac{t^n}{2a^n}$.

Si $a<t\leqslant 2a$, d'après la question précédente, $\mathbb{P}(V_n\leqslant t)=\dfrac{t}{2a}$.

Si $t>2a$, alors $\mathbb{P}(V_n\leqslant t)=1$.

$$\text{Ainsi }\mathbb{P}(V_n\leqslant t)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad t<0\\ \dfrac{t^n}{2a^n} & \text{si}\quad 0\leqslant t\leqslant a\\ \dfrac{t}{2a} & \text{si}\quad a<t\leqslant 2a\\ 1 & \text{si}\quad t>2a\end{cases}$$

CONCOURS ECRICOME PREPA

En faisant tendre n vers $+\infty$, $\mathbb{P}(V_n \leqslant t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \dfrac{t}{2a} & \text{si} \quad a \leqslant t \leqslant 2a \\ 1 & \text{si} \quad t > 2a \end{cases}$.

La fonction $F : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \dfrac{t}{2a} & \text{si} \quad a \leqslant t \leqslant 2a \\ 1 & \text{si} \quad t > 2a \end{cases}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Donc F est une fonction de répartition d'une variable aléatoire Z.

Ainsi, V_n converge en loi vers Z.

(c) $\mathbb{P}\left(V_n > \dfrac{3}{2a}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(V_n \leqslant \dfrac{3}{2a}\right)$. D'après la question (a), $\mathbb{P}\left(V_n > \dfrac{3}{2a}\right) = 1 - \dfrac{\frac{3}{2}a}{2a} = \dfrac{1}{4}$.

Alors $\mathbb{P}\left(V_n > \dfrac{3}{2a}\right)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc V_n n'est pas convergent.

15. (a) Remarquons que $M_n = \dfrac{2}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \dfrac{2X_1}{n} + \dfrac{2}{n}(X_2 + \cdots + X_n)$.

Donc $M_n = \dfrac{2X_1}{n} + \dfrac{n-1}{n} M'_n$.

(b) En décomposant $a = \dfrac{a}{n} + a\dfrac{n-1}{n}$,

$$|M_n - a| = \left|\frac{2X_1}{n} + \frac{n-1}{n}M'_n - a\right| = \left|\frac{1}{n}(2X_1 - a) + \frac{n-1}{n}(M'_n - a)\right|.$$

Par l'inégalité triangulaire :

$$|M_n - a| \leqslant \frac{1}{n}|2X_1 - a| + \frac{n-1}{n}|M'_n - a|.$$

Or $0 \leqslant X_1 \leqslant 2a$. Donc $-a \leqslant 2X_1 - a \leqslant 3a$.
Et $0 \leqslant \dfrac{n-1}{n} \leqslant 1$.

Donc $|M_n - a| \leqslant \dfrac{3a}{n} + |M'_n - a|$.

(c) Si $[M'_n - a| < \varepsilon$, alors par la question précédente on a

$$|M_n - a| < \frac{3a}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Donc $\Big[|M'_n - a| < \varepsilon\Big] \subset \Big[|M_n - a| < 2\varepsilon\Big]$.

(d) De même pour $\dfrac{\varepsilon}{2}$, il existe un entier N tel que $\forall n \geqslant n$,

$$\Big[|M_n - a| \geqslant \varepsilon\Big] \subset \left[|M'_n - a| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right],$$

Donc $0 \leqslant \mathbb{P}\left(|M_n - a| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|M'_n - a| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$.

Comme (M_n) converge en probabilité vers a, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|M'_n - a| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right) = 0$.

Donc par encadrement $\mathbb{P}\left(|M_n - a| \geqslant \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, (M_n) converge en probabilité vers a.

16. Dans le cas où X_1 est faussée, on voit que V_n ne converge plus, alors que M_n si. Les intervalles de confiance sur M'_n ayant un diamètre proportionnel à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et la « perturbation » apportée par X_1 étant un $O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, on obtiendra même des résultats identiques sur M_n que ceux obtenus à la partie 2 !

En résumé : l'estimateur V_n est converge certes plus rapidement que M_n, mais il est aussi bien plus sensible aux erreurs (l'estimateur M_n est plus *robuste* que V_n).

RAPPORT D'ÉPREUVE

Remarques globales

Avec une moyenne de 11,50 et un écart-type de 5,44, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Forme

Les copies sont souvent bien présentées, les résultats sont souvent mis en valeurs. Les candidats qui à l'inverse ne font pas cet effort ne peuvent pas être évalués de manière indulgente. Certaines copies, heureusement rares, ressemblent à de véritables brouillons.

Lorsque l'énoncé fournit la réponse à une question calculatoire, il convient de détailler les calculs. Le correcteur n'attribuera pas de points à des arguments du type « par le calcul on obtient [...] » ou « de même que précédemment ».

Il convient de répondre explicitement aux questions posées.

Les calculs en « zig-zag » sont extrêmement pénibles à suivre pour le correcteur, et cela doit l'être aussi pour le candidat. Une telle présentation n'incite pas le correcteur à étudier en détail le calcul, pour attribuer quelques points en cas d'erreur. Le nombre de copies n'est pas limité : nous incitons les candidats à aérer et aligner leurs calculs, ainsi qu'à les disposer correctement.

Fond

Les candidats doivent simplifier leurs réponses aux questions de calcul, ce n'est pas au correcteur de reprendre la réponse pour en vérifier la correction ! Il est indispensable de conclure une question.
Ce sujet a mis en lumière les grandes difficultés que rencontrent bon nombre de candidats lors des manipulations d'inégalités. Les techniques de base (relevant souvent du lycée, voire du collège) sont loin d'être acquises, et beaucoup de candidats semblent ne pas avoir les idées claires sur le type de réponses à apporter aux problèmes qui mettent en jeu ces techniques. Par exemple, pour majorer un terme de la forme $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, la plupart des candidats essaient de majorer $(x^2+y^2)\ldots$

On relève de grandes confusions entre appartenance et inclusion. Il faut prendre du recul sur les réponses apportées : on ne peut pas décemment proposer une probabilité ou une fonction de répartition prenant des valeurs négatives.

Remarques question par question

Exercice 1

Partie 1 : Étude de trois matrices

1. La première partie de cette question est en général bien réalisée.
   Cependant la déduction des valeurs propres entraine des confusion de vocabulaire : ainsi il est souvent écrit que « $X^3+3X=0$ est un polynôme annulateur de la matrice A ». Trop de candidats ne maîtrisent

pas le lien entre polynôme annulateur et valeur propre, concluant directement après avoir trouvé 0 pour unique racine que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$. La factorisation du polynôme annulateur $X^3 + 3X$ est parfois assez hasardeuse et donne les résultats suivants : $X^2(X+3)$ ou $X(X^2-3)$. Certains ne recherchent pas les valeurs propres à partir de l'équation obtenue comme imposé dans le sujet et surtout pensent que les valeurs propres d'une matrice sont ses éléments diagonaux, ou bien qu'une matrice ayant des zéros sur sa diagonale ne peut être diagonalisée ou n'est pas inversible.
Pour la non-diagonalisation de A, certains utilisent l'argument incorrect : « A n'est pas symétrique », montrant ainsi une confusion dans le sens des implications. D'autres encore affirment que A est antisymétrique donc non-diagonalisable. Certains candidats comparent la somme des dimensions des sous-espaces propres à la dimension de l'ensemble des matrices carrées $\mathscr{M}_3(R)$, ou confondent dimension et taille de A. Il n'est *a priori* pas du tout évident que « *A admet au moins une valeur propre réelle* ».

2. De (trop) nombreux candidats se lancent dans l'étude des éléments propres (avec généralement des erreurs) de J et S alors qu'il suffisait de remarquer que ces matrices sont symétriques réelles, donc diagonalisables. Une telle démarche indique une mauvaise lecture et un manque d'analyse de l'ensemble de l'exercice. Il est conseillé aux candidats de ne pas se lancer tête baissée et sans réflexion dans des calculs longs et hasardeux, les sujets privilégient les raisonnements à des calculs fastidieux. Des candidats remarquent que S est symétrique, mais ne voient pas que J l'est également. L'argument que S et J sont à coefficients réels est très souvent oublié.
Il a également été constaté une certaine confusion entre J et I_3. Une lecture attentive de l'énoncé devrait éviter ce type de confusion.

3. Le raisonnement suivant (gravement erroné) : « si $JX \neq 0$, comme $J \neq 0$ on a $X = 0$ » est trop souvent rencontré.
L'énoncé est parfois mal interprété et beaucoup de candidats comprennent le résultat de cette question comme « J et S ont mêmes vecteurs propres ».
Ceux qui ont adopté une méthode calculatoire, en cherchant les sous-espaces propres de S puis en testant sur J chacun des vecteurs trouvés, ont perdu un temps précieux et peu sont arrivés au bout de ces calculs. Et dans ce cas, beaucoup ne l'ont vérifié que pour 3 vecteurs propres et non pour tous les vecteurs propres de S.
Toutefois, plusieurs candidats montrent assez aisément qu'un vecteur propre X associé à une valeur propre non nulle de S vérifie $JX = 0$, donc que X est vecteur propre de J associé à 0, puis que $(1,1,1)$ est base de $\mathrm{Ker}(S)$ et est vecteur propre de J pour la valeur propre 3. Un dernière étape indiquant que tous les cas ont ici été traités est souvent manquante.

4. Cette question n'a pas été très souvent traitée de manière parfaitement correcte : on retrouve régulièrement l'affirmation fausse : « S et J ont les mêmes vecteurs propres ». De plus, écrire la relation de diagonalisation pour S avec une matrice de passage P puis pour J avec une matrice de passage Q et conclure que nécessairement $P = Q$ est une erreur de raisonnement couramment retrouvée. Des candidats ne comprennent pas le but de la question, à savoir diagonaliser dans une même base. Un certain nombre de candidats croient que mêmes vecteurs propres impliquent même valeurs propres. Certains candidats ont avancé que S et J étaient semblables, ce qui est faux.

Partie 2 : Étude des matrices magiques.

La plupart des candidats n'ont pas compris qu'il était possible d'utiliser s en remplacement de tous les ℓ_i, c_j, d_1 et d_2 ; à partir de la question 5. Cela occasionne alors des réponses souvent lourdes et peu lisibles.

5. Beaucoup de candidats montrent correctement la linéarité mais oublient d'écrire que ℓ_1 est une forme.

6. Peu de candidats pensent à interpréter $\mathcal{K}_n$ comme un noyau. Dans beaucoup de copies, l'inclusion $\mathcal{K}_n \subset \mathscr{E}_n$ est oubliée. La linéarité de s n'est que très rarement exploitée, bien qu'elle soit donnée par l'énoncé. Trop de candidats démontrent en pratique à nouveau cette linéarité et perdent du temps en vérifiant la nullité de la somme de toutes les lignes et toutes les colonnes et les diagonales. Il ne suffit pas d'affirmer que $\mathcal{K}_n$ est stable par combinaison linéaire, mais il fallait le prouver et de conclure clairement par l'appartenance de $M + \lambda N$ dans $\mathcal{K}_n$ et non seulement la somme nulle.

7. Des confusions conduisent à écrire que $\ell_i\left({}^{\mathrm{t}}M\right) = c_j(M)$ (et inversement), les indices i et j n'ayant pas de rapport entre eux. Les égalités des sommes des lignes/colonnes/diagonales sont parfois incomplètes (en particulier d_2 est oubliée.).

8. Certains candidats partent sur une « démonstration par l'absurde » en supposant qu'il existe λ, μ des réels vérifiant $M - \lambda J \in \mathcal{K}_n$ et $M - \mu J \in \mathcal{K}_n$. Ils réalisent rarement qu'ils démontrent alors uniquement l'unicité, et non l'existence. Peu de candidats pensent à préciser tout d'abord que $M - \lambda J_n$ est magique avant de s'intéresser à sa somme.

9. La non-nullité de W est trop souvent oubliée. On trouve aussi des réponses du type $MW = \ell_i(M)W$ qui sont éminemment maladroites, au mieux : la réponse ne dépend pas de i (rarement introduit).

Partie 3 : Étude du cas où $n = 3$

10. Cette question est en général bien traitée. Il est regrettable cependant que certains oublient de répondre à une partie de la question en ne précisant pas explicitement la valeur de la somme de chacune de ces matrices magiques. Quelques candidats n'ont pas compris que $s(M)$ est la valeur commune de $d_1(M)$, $d_2(M)$ et des $\ell_i(M)$, $c_j(M)$ (en cas d'égalité) et non la somme de ces valeurs.

11. Cette question classique et fort certainement traitée durant les deux années de CPGE est en général faite correctement. Cependant, il est peu acceptable qu'il reste une partie non négligeable de candidats qui ne savent pas la résoudre rapidement et soigneusement.

12. (a) Cette question a été très peu traitée ou justifiée trop succinctement. Un certain nombre de candidats se « perd » dans des équations vérifiées par $\ell_i(M_1)$, $\ell_i(M_2)$, $\ell_i(M)$, $\ell_i({}^{t}(M))$, $\cdots$ également avec les colonnes, au lieu d'utiliser directement la linéarité de la somme.

    (b) Cette question est très rarement correctement traitée, des arguments fantaisistes conduisent à conclure directement. Les raisonnements suivants ont souvent été rencontrés « M_1 et A sont antisymétriques donc colinéaires », ou « les deux matrices symétriques M_2 et S donc colinéaires ».

13. Certains candidats essaient d'utiliser un argument de dimension pour montrer que (A, J, S) est une base de l'espace des matrices magiques. Pourtant, la dimension de cet espace n'a été établie nulle part auparavant !

    Trop de candidats ne prouvent que la liberté de la famille et le font souvent de manière peu efficace en démontrant que la famille (A, S) est libre en revenant à la définition, alors qu'il s'agit d'une famille de deux vecteurs clairement non-colinéaires.

14. Une question très peu abordée par les candidats et alors mal rédigée par ceux ayant tenté d'y répondre.

Exercice 2

1. Cette question est en général bien traitée. Cependant une erreur fréquente sur les implications des régularités d'une fonction est rencontrée : « f est continue, donc dérivable, donc $\mathscr{C}^2$ ». Et certaines notations utilisées sont maladroites ou incorrectes : utiliser la notation ' pour dériver, écrire le symbole ∂ sous les formes suivantes : δ, σ, S. Une expression factorisée des dérivées partielles permettait de mener efficacement l'étude de la question suivante. Les candidats sont invités fortement à passer un peu de temps à mettre sous forme factorisée leurs résultats.

2. Cette question a souvent été bien réussie. Cependant des maladresses dans les calculs sont à signaler, l'obtention correcte des 4 points critiques étant relativement rare. Quelques candidats oublient que l'équation $y^2 = 1/2$ admet deux solutions. Certains candidats ne détaillent aucun calcul, et obtiennent étrangement les trois points étudiés dans les questions suivantes. Le correcteur interprète souvent cela comme un manque d'honnêteté intellectuelle, ce qui ne peut que nuire à l'évaluation de la suite de la copie.

3. Bien que la matrice soit diagonale, certains élèves se lancent dans le calcul de recherche des valeurs propres en résolvant $A - \lambda I$, en se trompant parfois même dans les calculs.

   Certains croient à tort que la présence de deux valeurs propres de signe différent ne permet pas de conclure.

   Certains oublient tout simplement de conclure quant à l'existence ou non d'un extremum : se contenter de dire que la fonction admet un point selle (ou col, à condition de ne pas l'écrire « colle »...) ne répond pas complètement à la question.

   Que $\mathbb{R}^2$ soit ouvert et $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ soit point critique sont rarement évoqués dans la conclusion, ici et dans les deux questions suivantes. Cet oubli est encore plus dommageable quand le point ne fait pas parti de la liste obtenue dans la question 2.

4. Cette question a souvent été bien réussie, mais peu traitée. La recherche de valeurs propres d'une matrice diagonale ne devrait toutefois pas nécessiter l'usage d'un déterminant.

5. Peu de candidats parviennent à obtenir les valeurs propres exactes de la matrice hessienne. Le facteur $\mathrm{e}^{-3/4}$ est notamment fréquemment oublié. Certains candidats pensent qu'une matrice à coefficients négatifs ne peut avoir qu'un spectre négatif. Or, ceci est faux, comme le montre le contre-exemple $A = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Certains candidats font appel au déterminant pour obtenir le signe du produit des valeurs propres, ce qui est hors programme. Quelques rares candidats utilisent les résultats hors programmes avec les notations de Monge pour conclure.

6. (a) Majorer correctement l'exponentielle semble hors de portée pour la plupart des candidats. Dans l'ensemble, lesD majorations sont souvent très confuses. L'inégalité triangulaire est peu utilisée, et l'absence de valeurs absolues est très fréquente.

   (b) Beaucoup de copies n'abordent pas cette question. La limite demandée a posé des problèmes, de manière surprenante. Beaucoup de candidats ne sont pas à l'aise avec les croissances comparées, et se sentent obligés de pousser de lourds développements. Très peu de candidats ne savent pas comment utiliser la valeur de la limite pour répondre à la deuxième partie de la question.

   (c) Cette question est peu abordée et les représentations graphiques de $\mathcal{K}$ données sont rarement correctes : un disque, une portion du carré demandé, souvent le quart.

(d) Cette question est rarement abordée. Les quelques candidats traitant cette question se perdent souvent, ne réalisant pas que c'est sur l'**image** des points critiques qu'il faut raisonner.

7. Bien qu'il semble clair que beaucoup de candidats aientnt déjà vu ce type de graphe, leurs interprétation portent souvent sur la taille des flèches, mais presque aucun ne pense à relier ce graphe à la propriété du cours en jeu ici et ne fait pas le lien avec les extrema liés. Beaucoup de justifications sont fantaisistes : « le point est à l'extrémité du cercle » ou « la taille du vecteur est très petite ».
8. Cette question simple sur le signe d'un trinôme ne sollicite que peu de notions du programme propre des CPGE. Il est regrettable qu'elle fut si peu traitée et de manière imparfaite. Une étude sans calcul de la dérivée était attendue. Certains candidats donnent la liste des extrema locaux, d'autres précisent les points en lesquels les extrema sont atteints mais ne donnent pas leur valeur numérique.
9. Cette question est très peu traitée. Le lien avec la question précédente et un commentaire de la figure ont été extrêmement rares.

Problème

Partie 1 : Estimateur du maximum de vraisemblance

1. (a) Ce type de question Scilab faisant partie du bagage minimum en informatique devrait être abordée par beaucoup plus de candidats.
   Les commandes `input` et `disp` n'ont rien à faire dans le corps d'une fonction scilab, dans ce contexte.
   Il est regrettable, alors que l'énoncé rappelait généreusement la méthode pour simuler une loi uniforme, que certains candidats ne parviennent pas a minima à choisir les bonnes valeurs ded paramètres (il reste trop fréquemment la variable `m` et/ou `b` dans la ligne de commande).
   La fonction `max` ne semble pas être toujours connue des candidats, on relève des boucles `FOR` pour trouver le maximum d'une liste.

   (b) Cette question n'est pas toujours abordée, ce qui laisse penser que certains candidats ont réalisé une impasse sur les statistiques. La plupart des réponses données sont toutefois satisfaisantes.
2. Les questions 2 et 3 sont souvent traitées efficacement et avec succès, ce qui montre que les candidats y ont été bien préparés. C'est un point de satisfaction !

   (a) Cette question de cours est en grande majorité bien traitée.

   (b) En général, cette question en général est bien traitée et bien justifiée.
   Cependant cette écriture $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right)$ est trop souvent rencontrée : elle n'a pas de sens. Quelquefois, l'intersection porte sur des probabilités et non sur des événements.

   (c) On relève une certaine méconnaissance des critères du cours permettant de garantir qu'une fonction de répartition correspond à une variable à densité. Certains fournissent une liste, souvent trop longue, de propriétés parmi lesquelles ne figurent pas toujours les deux éléments indispensables.
   Rappelons en particulier que la croissance n'est pas à vérifier.
   Dans le calcul de la densité, beaucoup pensent que la dérivée de $x \longmapsto \left(\dfrac{x}{a}\right)^n$ est $x \longmapsto \left(\dfrac{x}{a}\right)^{n-1}$.
3. Une maladresse souvent commise : l'image de V_n n'est pas *finie*, mais *bornée*.
   Le calcul de l'espérance est effectuée avant ou pendant l'étude de la convergence absolue : il convient de mieux organiser ces deux raisonnements distincts. Certains candidats mènent leurs calculs sous réserve

de convergence et donnent la valeur numérique de l'espérance sans 'lever' à aucun moment la réserve. Beaucoup de candidats ne répondent pas à la question posée (V_n est-il biaisé ?), mais indiquent que V_n est asymptotiquement sans biais. Si cette affirmation est en soi correcte (et pertinente), elle ne répond malheureusement pas à la question posée !

4. Un manque de maîtrise dans la gestion des valeurs absolues apparaît : la traduction de $|V_n - a| \geqslant \varepsilon$ devient $-\varepsilon \leqslant V_n - a \leqslant \varepsilon$ ou encore $\varepsilon \leqslant V_n - a \leqslant -\varepsilon$.
5. Une question peu abordée. La détermination correcte de $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{t}{an}\right)^n$ est bien réalisée par un bon nombre de candidats, mais posent encore des problème pour un certain nombre de candidats qui composent de manière illicite des équivalents.
6. Cette question est très arement abordée.
   On a observé quelques tentatives intéressantes. Ces candidats-l) ont toutefois eu des difficultés à faire « disparaître » le paramètre a des bornes de l'intervalle. Le caractère asymétrique de la situation, qui pouvait être observé dans le graphe donné précédemment (on lisait que $V_n \leqslant a$) n'a pas bien été vu.
7. (a) Cette question simple est en général bien réalisée.
   (b) La définition du risque quadratique est mal connue !
   La réponse étant donnée, le correcteur est vigilant sur la réalité des calculs effectués : des tentatives d'entourloupe sont récurrentes (et toujours à proscrire !)

Partie 2 : Méthode des moments

8. Cette question d'informatique est peu traitée, mais quand elle est traitée, elle l'est correctement sauf certains qui oublient le coefficient 2 dans la définition de M_n.
9. Cette question est souvent et assez bien abordée par les candidats.
   Invoquer l'indépendance des variables aléatoires X_k pour le calcul de $E\left(\overline{X}_n\right)$ est inutile ; seule la linéarité de l'espérance doit être invoquée.
   La variance d'une loi uniforme n'est pas toujours bien connue, elle est parfois confondue avec celle d'une loi uniforme *discrète*.
10. Cette question est en général bien traitée par ceux qui l'ont abordée.
11. Cette question est rarement traitée.
    Le théorème central limite est mal maîtrisé, tant du point de vue des hypothèses que dans sa formulation.
12. Cette question est très rarement abordée.
    La notion d'intervalle de confiance n'inspire manifestement pas confiance.
13. Certains (rares) candidats fournissent des arguments corrects permettant de comparer les risques mais oublient de confronter leurs observations au graphique.

Partie 3 : Consistance de ces estimateurs

14. (a) Cette question est en général bien traitée par ceux qui l'ont abordée.
    Certains candidats pensent à tort que $\max(X_1, \ldots, X_n) = X_1$ car le support de X_1 « comprend » des valeurs plus grandes que celles des autres variables aléatoires X_i pour $i \geqslant 2$.
    (b) Cette question est en général bien traitée par ceux qui l'ont abordée.
    (c) Cette question relativement simple et abordable par toute personne qui lit bien l'énoncé, une bonne part de la réponse se trouvant dans une question précédente, est malheureusement trop peu souvent

abordée, et les erreurs y sont regrettables.

Trop de candidats donnent une réponse faisant intervenir la disjonction des cas $\frac{3}{2}a < 0$; $\frac{3}{2}a \in [0, a]$; $\frac{3}{2}a \in [a, 2a]$; $\frac{3}{2}a > 2a$. Cette discussion n'a pourtant pas lieu d'être !

Parmi ceux qui trouve la probabilité de $1/4$, la majorité « intuite » que l'estimateur ne converge pas sans réussir à le prouver rigoureusement.

15. (a) Cette question assez simple est très rarement traitée.

    Un bon nombre de bonnes réponses, mais aussi bien trop d'erreurs grossières.

    (b) Cette question est très rarement abordée.

    L'erreur très souvent rencontrée ici est un problème de factorisation: $\frac{n-1}{n}M'_n - a = \frac{n-1}{n}(M'_n - a)$.

    (c) Cette question est très très rarement abordée.

    (d) Cette question est très très rarement abordée.

16. Cette question est très rarement abordée.