2023

ANNALES

Mathématiques Technologiques

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

VOIE ÉCONOMIQUE ET

COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie 1

1.
```python
import numpy as np

def suite(n,u0):
    u = u0
    for k in range(n-1):
        u = 5/12*u+1/3
    return u
```

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3} \iff \frac{7}{12}x = \frac{1}{3} \iff x = \frac{4}{7}$.

   L'unique solution de $x = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$ est donc $\ell = \frac{4}{7}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_{n+1} = \frac{5}{12}u_n + \frac{1}{3}$ et $\ell = \frac{5}{12}\ell + \frac{1}{3}$.

   D'où $v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = \frac{5}{12}(u_n - \ell) = \frac{5}{12}v_n$ en soustrayant ces deux égalités.

   La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est donc géométrique de raison $\frac{5}{12}$.

   (c) Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$.

   (d) Or $v_1 = u_1 - \frac{4}{7}$.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(u_1 - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$.

Partie 2

3. (a) $AX_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 36 \end{pmatrix}$

   $AX_2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

   (b) Remarquons que $AX_1 = 12X_1$ et $X_1 \neq 0$, donc X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 12.

   De même $AX_2 = 5X_2$ et $X_2 \neq 0$, donc X_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 5.

   Donc les valeurs propres de A sont 5 et 12 et X_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 12 et X_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre 5.

4. Posons $a = 4$, $b = -1$, $c = 3$, $d = 1$. Alors $det(P) = ad - bc = 7 \neq 0$. La matrice P est donc inversible.

   Et $P^{-1} = \dfrac{1}{det(P)} \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q$.

5. $PD = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$.

   $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = A$.

   Ainsi $A = PDP^{-1}$.

6. Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

   - **Initialisation.** $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$.
     Donc $A^0 = PD^0P^{-1}$.
   - **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$, et démontrons que $A^n = PD^{n+1}P^{-1}$.
     $A^{n+1} = A^n\dot{A}$ par définition
     $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1}$ par hypothèse de récurrence et question 5
     $A^{n+1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

   Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

7. (a) $P^{-1}X = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   Donc $P^{-1}X = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $A^nX = PD^nP^{-1}X$ par question 6
   $A^nX = \dfrac{1}{7}PD^n \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ par question 7a)
   Or $D^n = \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$ car D est une matrice diagonale.
   D'où $A^nX = \dfrac{1}{7}P \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}P \begin{pmatrix} 12^n \\ -3 \cdot 5^n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \cdot 12^n + 3 \cdot 5^n \\ 3 \cdot 12^n - 3 \cdot 5^n \end{pmatrix}$.

   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ A^nX = \dfrac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \cdot 12^n + 3 \cdot 5^n \\ 3 \cdot 12^n - 3 \cdot 5^n \end{pmatrix}$.

Partie 3

8. Comme le premier jour, il fait beau, on a $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ (énoncé).
   D'après l'énoncé, l'événement A_1 est réalisé.
   Donc $A_2 = A_1 \cap A_2$, donc $a_2 = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) = 1 \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}$ d'après la formule des probabilités conditionnelles et l'énoncé.
   Comme $B_2 = \overline{A_2}$, on a $b_2 = 1 - P(A_2) = 1 - a_2 = \dfrac{1}{4}$.

   Ainsi $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{3}{4}$ et $b_2 = \dfrac{1}{4}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) D'après l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$, $P_{A_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$.
Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n) appliquée à A_{n+1}, :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap B_n) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc $P(A_{n+1}) = \dfrac{3}{4}P(A_n) + \dfrac{1}{3}P(B_n)$.

De même $P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1})$ Donc $P(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}P(A_n) + \dfrac{2}{3}P(B_n)$.

(b) Alors $M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12}A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{3}b_n \\ \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{2}{3}b_n \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

(c) (A_n, B_n) forme un système complet d'événements. Ainsi $a_n + b_n = P(A_n) + P(B_n) = 1$.

10. (a) Montrons, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **Initialisation.** D'une part, $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  D'autre part, $M^{1-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  On a bien $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = M^{1-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  Supposons que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et démontrons que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= M\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} && \text{d'après la question 9b} \\ &= M \times M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} && \text{ce qui démontre l'hérédité.} \end{aligned}$$

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions 10a et 7b, :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}}A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} \\ 3 \times 12^{n-1} - 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

D'où $a_n = \dfrac{1}{12^{n-1}} \times \dfrac{1}{7}\left(4 \times 12^{n-1} + 3 \times 5^{n-1}\right)$ et $b_n = \dfrac{1}{12^{n-1}} \times \dfrac{1}{7}\left(3 \times 12^{n-1} - 3 \times 5^{n-1}\right)$.

Après simplification, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1}$ et $b_n = \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1}$.

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 9a, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$.

    Or, d'après la question 9c, $b_n = 1 - a_n$. Donc $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{3}(1-a_n) = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{3}\right)a_n + \dfrac{1}{3}$.

    Ainsi $a_{n+1} = \dfrac{5}{12}a_n + \dfrac{1}{3}$.

    (b) La suite (a_n) est la suite récurrente étudiée dans la partie 1, avec $u_1 = a_1 = 1 \in [0,1]$.

    Donc d'après la question 2d $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \left(a_1 - \dfrac{4}{7}\right)\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{7} = \left(1 - \dfrac{4}{7}\right)\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{7}$.

    Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{7}$.

    (c) Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 1 - a_n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = 1 - \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} + \dfrac{4}{7}$.

    D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1}$.

12. La suite $\left(\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1}\right)$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{12}$, avec $-1 < q < 1$. Elle converge donc vers 0.

    Par opérations usuelles sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{4}{7}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{3}{7}$.

13. (a) La probabilité recherchée est $p = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 .... \cap A_9 \cap B_{10}) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_2}(A_3)...P_{A_9}(B_{10})$ d'après formule des probabilités composées, sachant que la météo d'un jour donné dépend uniquement de celle du jour précédent. Donc $p = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^8$.

    (b) On cherche à déterminer $P(B_{10})$, qui nous est donnée par la question 11c : $P(B_{10}) = \dfrac{3}{7} - \dfrac{3}{7}\left(\dfrac{5}{12}\right)^9$.

Exercice 2

Partie 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $e^x > 0$ donc $1 + e^x > 1 > 0$, d'où $\ln(1+e^x)$ bien défini.

   La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $u(x) = 1 + e^x$. On a $u'(x) = e^x$. Alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. D'où $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

3. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + e^x = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln(1) = 0$ par continuité de ln en 1.

   On en déduit que $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

4. (a) Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + e^x = +\infty$. Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^x) = +\infty$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + e^x) = \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1)$.

   Ainsi $f(x) = x + \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$.

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) - x = x + \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) - x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$ d'après 4b).

   On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) = \ln(1) = 0$ par opérations usuelles sur les limites.

   On en déduit que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

   (d) Soit $x \in \mathbb{R}$. De même qu'à la question précédente, on a $f(x) - x = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$.

   Or $1 + e^{-x} > 1$, donc $\ln(1 + e^{-x}) > \ln(1) = 0$ par stricte croissance de la fonction ln, ie $f(x) > x$.

   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de la droite (D).

5. La tangente (T_0) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

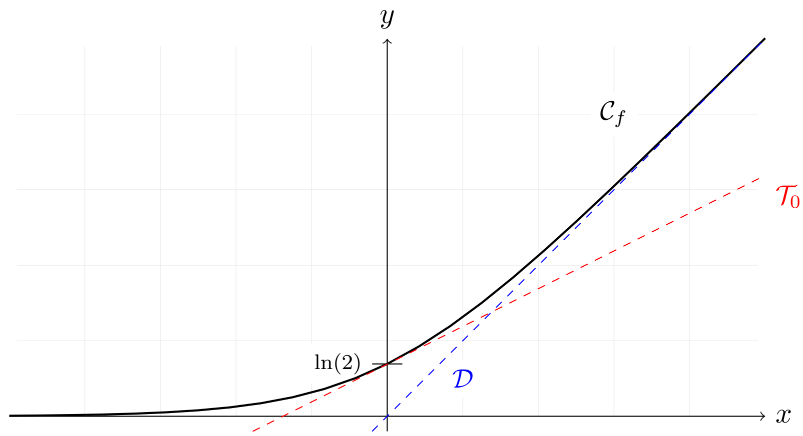
   Or $f'(0) = \dfrac{e^0}{1 + e^0} = \dfrac{1}{2}$ et $f(0) = \ln(1 + e^0) = \ln(2)$.

   Ainsi l'équation de la tangente (T_0) est $y = \dfrac{1}{2}x + \ln(2)$.

6. (a) Le tableau de variations de f est donné par

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0 $\nearrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$ $+\infty$

(b)



Partie 2

7. (a) Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lrll}
\text{On a} & (n+1) & \geqslant n & \\
\text{donc} & -(n+1)x & \leqslant -nx & \text{car } x \geqslant 0 \\
\text{d'où} & e^{-(n+1)x} & \leqslant e^{-nx} & \text{par croissance de l'exponentielle} \\
\text{donc} & 1+e^{-(n+1)x} & \leqslant 1+e^{-nx} & \\
\text{d'où} & \ln(1+e^{-(n+1)x}) & \leqslant \ln(1+e^{-nx}) & \text{par croissance de la fonction } \ln .
\end{array}$$

Donc $\forall x \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\forall x \in [0,1], g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$.
Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 g_{n+1}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x$, ou encore $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Donc la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) \geqslant 0$, donc $I_n \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
Or d'après la question précédente, la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
Par théorème de limite monotone, la suite (I_n) est donc convergente.

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour $x \in [0,1]$, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+e^{-nx})$. Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{-ne^{-nx}}{1+e^{-nx}}$.
Les quatre fonctions étant continues sur $[0,1]$, par théorème d'intégration par parties

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\
&= \Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \\
&= \Big[x\ln(1+e^{-nx})\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{-nxe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, $I_n = \ln(1+e^{-n}) + n\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\mathrm{d}x.$

(b) D'après la question 7c, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$.

On cherche donc à majorer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\mathrm{d}x.$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Comme $1+e^{-nx} > 1$, on a $\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}} \leqslant x\mathrm{e}^{-nx}$.

Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$

En utilisant cette inégalité et la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x.$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [0,1]$, on pose $u(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ et $v(x) = x$. Alors $u'(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ et $v'(x) = 1$.

Par intégration par parties, on a $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \left[-x\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\mathrm{d}x = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1.$

On en conclut que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n^2}.$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions 8b et 8c, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(1+e^{-n}) + n\left(\dfrac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n^2}\right)$

ou encore $0 \leqslant I_n \leqslant \ln(1+e^{-n}) - e^{-n} + \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(1+e^{-n}) - e^{-n} + \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$ (par somme et composition de limites).

Par théorème d'encadrement (ou des gendarmes), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$

9. (a)

```python
import numpy as np

def gn(n,x):
    return np.log(1+np.exp(-n*x))
```

(b) Le programme Python trace les premières valeurs de la suite (nI_n). On peut conjecturer à la lecture du graphique que cette suite converge, et qu'une valeur approchée de sa limite est 0.82. La lecture du programme nous indique de plus que cette suite semble converger vers $\dfrac{\pi^2}{12}$ (cf droite tracée).

Exercice 3

1.
- f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points (ici en s).
- Pour $x < s$, $f(x) = 0 \geqslant 0$.

  Et pour $x \geqslant s$, $f(x) = \dfrac{2s^2}{x^3}$. Or $x \geq s > 0$. Donc $f(x) \geqslant 0$.

  Donc f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.

- Soit $B<0$. $\displaystyle\int_B^s f(t)\mathrm{d}t = 0$, et $\displaystyle\lim_{B\to-\infty} 0 = 0$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^s f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

  Soit $A>0$. $\displaystyle\int_s^A f(t)\mathrm{d}t = \int_s^A \frac{2s^2}{t^3}\mathrm{d}t = \left[\frac{-s^2}{t^2}\right]_s^A = -\frac{s^2}{A^2} + \frac{s^2}{s^2} = 1 - \frac{s^2}{A^2}$.

  Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} 1 - \frac{s^2}{A^2} = 1$ donc $\displaystyle\int_s^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

  Par relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{s} f(t)\mathrm{d}t + \int_{s}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0+1 = 1.$$

De ces trois points, on déduit que f est une densité de probabilité.

2. La fonction de répartition F de S est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

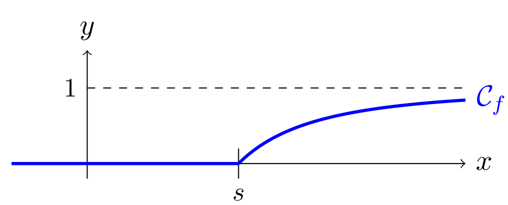
- Soit $x<s$. $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 0$.
- Soit $x \geqslant s$. Par relation de Chasles,
  $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{s} f(t)\mathrm{d}t + \int_{s}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_s^x \frac{2s^2}{t^3}dt = \left[\frac{-s^2}{t^2}\right]_s^x = \left[\frac{-s^2}{t^2}\right]_s^x = -\frac{s^2}{x^2} + \frac{s^2}{s^2} = 1 - \frac{s^2}{x^2}$.

Finalement, $\forall x \in]-\infty, s[,\ F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [s,+\infty[,\ F(x) = 1 - \left(\dfrac{s}{x}\right)^2.$

3. F est dérivable sur $[s,+\infty[$ et $\forall x \in [s,+\infty[, F'(x) = f(x) = \dfrac{2s^2}{x^3} > 0$. La fonction F est donc strictement croissante sur $[s,+\infty[$ et son tableau de variations est donné par :

x	s	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$0 \nearrow$	1

L'allure de la fonction de répartition F est



4. (a) La fonction F est une fonction continue et strictement croissante de $[s,+\infty[$ vers $[0,1[$. F réalise donc une bijection de $[s,+\infty[$ vers $[0,1[$.

(b) Soit $y \in [0,1[$.
On a $0 \leqslant y < 1$ donc $0 < 1-y \leqslant 1$ d'où $\dfrac{1}{1-y} > 1$, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0,1]$. Par stricte croissance de la fonction racine carrée et s étant strictement positif, $s \times \sqrt{\dfrac{1}{1-y}} \in [s,+\infty[$.
Donc $\forall y \in [0,1[,\ G(y) \in [s,+\infty[$.

(c) Soit $y \in [0,1[$. D'après la question précédente, $G(y) \in [s,+\infty[$, donc

$$F(G(y)) = 1 - \left(\frac{s}{G(y)}\right)^2 = 1 - \left(\frac{s}{s\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2 = 1 - \frac{s^2}{s^2 \times \frac{1}{1-y}} = 1 - \frac{1-y}{1}.$$

Ainsi $F(G(y)) = y$.

5. (a) Notons F_U la loi de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1[$.
F_U est donnée par $\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ x & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x \in [1,+\infty[. \end{cases}$

(b) ⋄ Soit $x \in [s,+\infty[$. Alors $P(V \leqslant x) = P(G(U) \leqslant x)$.
Or $(G(U) \leqslant x) = (U \leqslant F(x))$ car F est croissante et F et G sont bijections réciproques (cf question 4).
Donc $P(V \leqslant x) = P(U \leqslant F(x)) = F(x)$ car $F(x) \in [0,1[$ d'après la question 4a et la définition de la fonction de répartition d'une loi uniforme.

⋄ Soit $x \in]-\infty, s[$. On a $P(V \leqslant x) = P(G(U) \leqslant x) = 0$ (cf 4b).
Finalement, $\forall x \in [s,+\infty[,\ P(V \leqslant x) = P\big(U \leqslant F(x)\big) = F(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in]-\infty,s[,\ P(V \leqslant x) = 0.$

(c) Nous venons de démontrer que V et S ont la même fonction de répartition. Donc V et S suivent la même loi.

6. Pour simuler S, on va commencer par faire une simulation d'une variable aléatoire uniforme U sur $[0,1[$ et utiliser la question 5c), à savoir que $G(U)$ et S sont de même loi.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def S(s):
    U = rd.random()
    S = s*np.sqrt (1/(1-U))
    return S
```

7. La fonction f est nulle sur $]-\infty, s]$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} tf(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

   Soit $A > s$. On a $\displaystyle\int_{s}^{A} tf(t)\mathrm{d}t = \int_{s}^{A} \frac{2s^2}{t^2}dt = \left[\frac{-2s^2}{t}\right]_s^A = -\frac{2s^2}{A} + 2s$.

   D'où $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{2s^2}{A} + 2s = 2s$. Donc $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 2s$.

   Par relation de Chasles, on en conclut que S admet une espérance et que $E(S) = 2s$.

8. De même, $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

   Soit $A > s$. On a $\displaystyle\int_{s}^{A} t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_{s}^{A} \frac{2s^2}{t}\mathrm{d}t = \left[2s^2\ln(t)\right]_s^A = 2s^2\ln(A) - 2s^2\ln(s)$

   Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} 2s^2\ln(A) - 2s^2\ln(s) = +\infty$. Donc l'intégrale est divergente. Ainsi S^2 n'admet pas d'espérance.

   Donc S n'admet pas de variance.

9. On cherche à déterminer

$$p = P\left(S \geqslant \frac{3}{2}s\right) = 1 - P\left(S \leqslant \frac{3}{2}s\right) = 1 - F\left(\frac{3}{2}s\right) = 1 - \left(1 - \left(\frac{s}{3/2s}\right)^2\right) = 1 - \left(1 - \frac{4}{9}\right).$$

   Ainsi $p = \dfrac{4}{9}$.

10.
    - Pour chaque salarié, on a une épreuve de Bernoulli, de type succès ("le salarié a un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}s$, avec une probabilité $p = \frac{4}{9}$ calculée à la question 9") ou échec
    - On reproduit l'expérience n fois, de manière indépendante et dans les mêmes conditions (cf énoncé)
    - N_n est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

    N_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{4}{9}$.

    Et $N_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et $\forall k \in [\![0, n]\!], P(N_n = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

11. Alros $E(N_n) = n \times p = \dfrac{4}{9}n$ et $V(N_n) = np(1-p) = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{9}n = \dfrac{20n}{81}$.

12. On cherche à déterminer

$$\begin{aligned} P(N_n \leqslant 2) &= P(N_n = 0) + P(N_n = 1) + P(N_n = 2) \\ &= \binom{n}{0}\left(\frac{4}{9}\right)^0\left(\frac{5}{9}\right)^n + \binom{n}{1}\left(\frac{4}{9}\right)^1\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \binom{n}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^2\left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

    Or $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Donc $P(N_n \leqslant 2) = \left(\dfrac{5}{9}\right)^n + n\left(\dfrac{4}{9}\right)\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}\left(\dfrac{4}{9}\right)^2\left(\dfrac{5}{9}\right)^{n-2}$.

13. (a) Par linéarité de l'espérance, $E(M_n) = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(S_k) = \dfrac{1}{2n}nE(S) = \dfrac{2sn}{2n}$.

    On en conclut que $E(M_n) = s$.

(b) Dans le programme, on pose $s = 1330$, et $n = 1000$. F représente la matrice ligne $[M_1, ..., M_{1000}]$.

(c) Chaque appel donne une courbe différente, car l'appel à la fonction S fait appel à une variable aléatoire uniforme. Lorsque n tend vers $+\infty$, on peut conjecturer que ces réalisations de M_n semblent tendre vers s.

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. Il est à constater que dans l'ensemble les candidats font un réel effort dans ce sens. La majorité des copies est correctement présentée et organisée, avec un soin apporté à la mise en évidence des résultats. Les ratures brouillonnes sont à éviter absolument, il est préférable de reprendre un calcul mal engagé plutôt que de raturer ou effacer ou écrire pardessus certaines parties de calculs, rendant ainsi l'ensemble illisible. Il convient aussi d'apporter une attention à la graphie : dans certaines copies, il est difficile de distinguer les x des n, ce qui rend problématique la correction. L'accent mis par les préparateurs sur cette présentation est à entendre et à maintenir. Les quelques copies dont la présentation n'est pas soignée se retrouvent fortement pénalisées.
- Un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière. Dans certaines copies, la numérotation des questions n'est pas respectée, voire n'est pas du tout indiquée. Ce non respect rend très pénible la correction et rend le correcteur peu enclin à attribuer des points aux candidats.
- Les résultats doivent être mis en évidence en étant encadrés ou soulignés. Chaque question doit se terminer par une conclusion: elle est trop souvent absente et pas assez mise en évidence. Le correcteur ne mènera pas le raisonnement jusqu'à sa conclusion à la place du candidat.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
  Lors de la correction des copies de cette épreuve, il était notable que la connaissance et la compréhension du cours restent fragiles, en particulier en analyse sur l'étude d'une suite géométrique (exercice 1), sur les limites, mais aussi en algèbre sur le produit matriciel. Le sujet permet pourtant à un candidat moyen qui a travaillé sérieusement durant l'année de glaner des points sur les questions "classiques", quitte à délaisser les questions plus difficiles, notamment en soignant particulièrement la rédaction.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- Les calculs de base ne sont pas acquis par une partie non négligeable des candidats en particulier la multiplication et l'addition sont très souvent confondues (ainsi la question 2a de l'exercice 1 s'est révélée très compliquée), les propriétés des fonctions logarithmes et exponentielles peu maîtrisées. Un manque de

dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entraîner très régulièrement à faire des calculs. La présentation des calculs est parfois assez confuse .

- Une incompréhension de l'énoncé est constatée et clairement due à un manque de maîtrise du vocabulaire : ainsi observe-t-on dans certaines copies la confusion entre "incompatibles" et "indépendants", "positivité" et "croissance", "monotonie" et "continuité", "continue" et "définie". Beaucoup de candidats perdent des points par manque de précisions (vecteurs propres non nuls, D diagonale, rédaction d'un récurrence, oubli du SCE, formule explicite d'une suite arithmétique, formule de la dérivée, rédaction d'une IPP, intégrales impropres, loi binomiales, etc.) Les candidats sont invités pendant toute leur préparation à travailler la précision du vocabulaire et à s'appuyer sur leur enseignant pour vérifier la justesses des termes employés.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, très peu de candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 4,61, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Exercice 1

Cet exercice en trois parties, permet d'étudier une chaîne de Markov. La première partie d'analyse porte sur l'expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique. La deuxième partie d'algèbre détermine les puissances d'une matrice diagonalisable. Enfin la dernière partie de probabilité détermine la probabilité à l'instant n de chaque état de la chaîne de Markov et sa limite. Cet exercice est très détaillé et fait appel à des connaissances travaillées pendant l'année par les candidats.

Partie 1

1. Cette question est assez mal traitée dans l'ensemble. la syntaxe propre à Python n'est pas toujours maîtrisée : `for k in range(1;n+1)`, `for k in range(0,1)`, `for k in range(n,n+1)`, `for k in range(u1)`, ou encore `u=`$\frac{5}{12}$, `u=5/12+1/3`, `u=5/12u_n+1/3`, `u=5/12u1+1/3`, `u=5/12*k+1/3`, , `u=5/12u`.
   Un petite difficulté résidait ici dans le nombres de tours de boucle : $n-1$ et non n, à l'intérieur du `range`.
2. (a) Cette question élémentaire est trop peu souvent correctement effectuée.
   Beaucoup résolvent l'équation $\frac{5}{12}x + \frac{1}{3} = 0$. Beaucoup de calculs fractionnaires élémentaires massacrés.
   De très grandes confusions dans les priorités des opérations, et aussi dans les opérations elles-mêmes: L'équation proposée s'est transformée parfois en une équation du second degré avec une recherche du discriminant et donc deux solutions... ou en $x^2 = \frac{5}{12}x + \frac{1}{3}$, pour d'autres des simplifications s'effectuent dès la première étape et donnent $x = \frac{5}{12} + \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{5}{12} - \frac{1}{3}$ quand ce n'est pas $x = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{3}$.
   Il ne serait pas possible ici de donner toutes les résolutions farfelues rencontrées.

(b) Cette question est pour une partie des candidat très bien traitée et pour une autre partie en nombre équivalent de manière très farfelue.
Les candidats connaissent parfois la définition d'une suite géométrique, mais ne voient pas d'où démarrer pour montrer que (v_n) en est une. Certains candidats confondent les notions de suites arithmétiques et géométriques, débutant leur démonstration par l'étude de $v_{n+1} - v_n$.
La méthode d'étude d'une suite arithmético-géométrique semble très largement ignorée.

(c) De nombreuses erreurs de formules, les candidats ne voient pas qu'il faut adapter la formule avec v_1 comme premier terme.

(d) Une lecture d'énoncé un peu trop rapide a entrainé des erreurs évitables: Les candidats ont bien compris la relation $u_n = v_n + \ell$, mais oublient d'exprimer v_1 en fonction de u_1 comme le demande l'énoncé. Il n'est jamais précisé que $u_1 = 1$. Pour certains, l'énoncé comportait une erreur et c'est la suite définie par $v_n = u_n + \ell$ qu'il fallait
Quelques réponses surprenantes du type "la suite u est arithmétique" ... Plusieurs candidats semblent arranger leurs calculs de façon à ce qu'ils leur permettent de façon cohérente avec la question **11. b)**.
L'oubli des parenthèses peut engendrer de nombreuses erreurs.

Partie 2

3. (a) Cette question est bien réalisée par une grande majorité.
Certains candidats maladroits pensent que AX_1 donne une matrice carrée.

   (b) Une lecture attentive aurait été utile à certains candidats: l'énoncé demandait bien de préciser des vecteurs propres, et non des valeurs propres.
La vérification que les vecteurs sont non nuls pour plus de la moitié des candidats est bien trop souvent omise.
Pour certains AX_1 est un vecteur propre (ce qui ici est vrai, mais pas attendu au regard de la question précédente...)ou encore 12 est un vecteur propre de A ou de AX_1.

4. Cette question est bien réalisée, l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 par le déterminant est maîtrisée. Cependant certains candidats vérifient correctement que le déterminant est non nul n'explicitent pas (ou mal) la formule d'inversion. Quelques rédactions, parfois erronées, par la méthode du pivot, c'est une perte de temps assez importante.

5. Le résultat étant donné, il est attendu qu'au moins un des calculs PD ou DQ soit mentionné sur la copie. Ce calcul est en général bien détaillé et correct.

6. La récurrence est plutôt bien menée, et même très bien rédigée. Ce type de raisonnement a clairement été bien travaillé en classe.
Certains candidats ne concluent pas l'initialisation, ou se contentent d'écrire "la proposition est vraie" sans plus de précision.
Certains candidats maladroits rédigent mal leur hérédité. Signalons que si un candidat suppose que l'hypothèse de récurrence est vraie pour tout n ou au rang $n + 1$, il est fortement pénalisé.
Tous les candidats n'ont pas identifié qu'il fallait ici faire une récurrence.
Certains candidats ne concluent pas l'initialisation, ou se contentent d'écrire "la proposition est vraie" sans plus de précision. l'hérédité est parfois mal formulée (ainsi peut-on lire ; "montrons que A^{n+1} est vraie")
Sur certaines copies, apparaît l'erreur "grossière" $A^{n+1} = A^n \times A^n$ qui ne dérange parfois pas le candidat pour conclure à l'hérédité de la propriété.

7. (a) Cette question quand elle est abordée est bien traitée. I est regrettable que certains ne l'abordent pas.
   (b) Cette question est un peu plus abordée que la précédente.
   Cependant trop peu justifient l'expression de D^n.
   Beaucoup de candidats ne font pas le lien avec la question 6 et se contentent de porter les coefficients de la matrice A à la puissance n.
   De nombreuses erreurs de manipulation de puissances apparaissent, on lit souvent que $4 \cdot 12^n = 48^n$ ou -5^n qui devient $(-5)^n$.

Partie 3

8. Cette question est en général bien traitée. Notons cependant quelques confusions entre $P(A_2)$ et $P_{B_1}(A_2)$ ou entre 0 et $\varnothing$.
9. (a) Cette question est en général bien comprise, les candidats savent clairement quelle démarche suivre.
   Cependant pour appliquer la formule des probabilités totales, il est essentiel de citer le système complet d'événements utilisé.
   Trop de candidats justifient encore ces formules (données dans l'énoncé) par de jolies phrases mais sans formule à l'appui. Un arbre de probabilité peut permettre d'illustrer la démonstaryion mais en constitue en aucun cas une démonstration, il est important de bien préciser que la formule des probabilités totales est utilisée et de donner le système complet d'événements utilisés.
   (b) Une question en général bien traitée.
   (c) Cette question a révélé des confusion entre événements et probabilités ou des raccourcis maladroits: « a_n, b_n forment un système complet d'événements ».
   Certains justifient cette égalité donnée dans l'énoncé par des phrases plus ou moins compréhensible.
   Des affirmations assez surprenantes sont apparues fréquemment: « $a_n + b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ » ou « une somme de probabilité vaut toujours 1 ».
10. (a) Une question en général bien traitée.
   (b) Les résolutions de cette question sont dans l'ensemble assez chaotiques: le facteur $\frac{1}{12}$ est rarement élevé à la puissance $n-1$, trop peu voient le lien avec la question 6 de la partie 2.
11. (a) L'énoncé n'insistait peut-être pas suffisamment que les résultats de la question 10 sont à montrer de manière différentes. Ainsi des candidats n'ont pas compris ce qui étaient attendu d'eux ici.
   (b) Les candidats reconnaissent une suite arithmético-géométrique, et veulent donc parfois appliquer la méthode de leur cours, sans faire le lien avec la partie 1.
   On attendait précisément de faire un tel lien, et de préciser que $a_1 = 1$.
   (c) Quand cette question est abordée, elle est bien traitée.
   Les rares qui traitent la question oublient souvent les parenthèses et le changement de signe dans le calcul de b_n.
12. a_n et b_n représentant des probabilités, les candidats devraient s'interroger quand ils trouvent des limites infinies !... ou quand la somme des limites trouvées ne vaut pas 1 !
   Il est essentiel de préciser que $-1 < 5/12 < 1$ (et non $-1 \leqslant 5/12 \leqslant 1$) pour obtenir tous les points.

13. (a) Cette question est peu abordée et en général mal traitée.
Il est attendu des candidats un peu de formalisation, écriture avec les A_i et B_j. Cette étape mal effectuée mène souvent à des sommes de probabilités qui dépassent 1.
Peu précise qu'ils souhaitent utiliser la formule des probabilités composées.
(b) Peu ont compris qu'on demandait simplement b_{10}.

Exercice 2

Cet exercice d'analyse comporte deux parties. La première partie sur une étude de fonction est assez guidée. Elle se terminait pas un tracé trop souvent négligé. Dans la deuxième partie, une étude d'une suite définie à l'aide d'une intégrale est proposée aux candidats, et se termine par une approche informatique de la limite de (nI_n).

Partie 1

1. Cette question est bien moins traitée qu'attendu, elle n'est en général pas comprise et donc très mal traitée. Énormément de réponses du type « ln est définie sur $\mathbb{R}$ » ou « $ln(1+e^x)>0$ »
2. Le calcul de $f'(x)$ étant donné, il est essentiel que sur la copie on lise que le candidat a bien appliqué les formules de dérivation, et non recopié l'énoncé sans réfléchir. Certains voient dans l'expression de f un produit de fonctions : la fonction ln et la fonction $x \mapsto 1+e^x$.
La deuxième partie de cette question n'est pas comprise, peu traitée. La détermination du signe de $f'(x)$ est très approximative. La conclusion sur la monotonie de f devient souvent « f est monotone » sans plus de précision.
3. Certains pensent devoir utiliser la limite de ln en $-\infty$.
La question sur l'asymptote est souvent mal traitée, même avec une limite correcte. On trouve des équations surprenantes du type « $x=+\infty$ » ; et la traditionnelle confusion entre asymptote horizontale et asymptote verticale.
On lit aussi des équations fausses comme « $x=0$ », « $y=+\infty$ » et on voit des écritures abusives comme « $\mathrm{e}^{-\infty}$ ».
4. (a) Cette question est en général bien traitée. Comme à la question précédente, des notations abusives « $e^{+\infty}$ » sont trop fréquentes et à bannir.
Quelques confusions entre $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f'$.
(b) Cette question est peu traitée. Très peu de candidats ont une bonne initiative et dans ce cas, ils résolvent correctement la question.
(c) Quand elle est abordée, cette question est bien traitée
(d) La méthode nécessaire est clairement connue par bon nombre de candidats. Mais l'étude du signe est difficile. Et la dernière étape donnant une position en cohérence avec le signe obtenu est souvent mal réalisée. Un phrase complète de conclusion est attendue: Répondre seulement « au-dessus » ne suffit pas

5. Pour ceux qui connaissent l'équation de la tangente, la question est facilement et correctement résolue. Par contre les équations de tangente proposée sont assez farfelues: $T_0 = f'(0)(x-0)+f(0)$ (Ce n'est pas une équation mais une phrase dépourvue de sens) $y = f(0)(x-0)+f'(0)$ ou $f'(0)(x+0)+f(0)$ ou $y = f'(0)(0-x)+f(0)$ ou encore $y = f'(0)(x-0)f(0)$.

6. (a) En général cetet question est bien résolue. Cependant, une mauvaise lecture ou une lecture trop rapide des consignes est à déplorer: ainsi la valeur en 0 n'est pas souvent précisée.

   (b) Question pas trop traitée et très souvent complètement fausse.
   Il est dommage que la plupart des candidats n'engrange pas ces points plutôt faciles à obtenir.

Partie 2

Cette partie est peu abordée. Quelques candidats tentent en vain à répodnre à certanes quetsions.

7. (a) Cette question est souvent tentée, mais très rarement réussie.
   Les quelques-uns qui tentent des manipulations d'inégalités ne s'en sortent que rarement. Beaucoup s'égarent complètement en évoquant la décroissance de la fonction g_n ou une comparaison entre $g_n(x)$ et $g_1(x)$ ou entre $g_n(1)$ et $g_{n+1}(x)$ ou en tentant un raisonnement par récurrence.
   On rencontre souvent $\ln(1+e^{-nx}) = \ln(1+e^{-1}e^n e^x) = \ln(1)+\ln(e^{-1})\ln(e^n\ln(e^x) = ...$

   (b) Cette question est peu traitée.
   Une grande confusion autour de la décroissance est à constater: la décroissance de (I_n) et la supposée décroissance de g_n.
   Les candidats font souvent le lien avec la croissance de l'intégrale, mais rédigent parfois mal (avec des équivalences), ne rappellent pas suffisamment la positivité de l'intégrale et l'ordre des bornes.

   (c) Une grande partie des candidats ayant abordé cette question pensent à utiliser le théorème de la limite monotone. Mais une étude précise de la minoration de (I_n) était attendue, et peu l'ont traitée. Beaucoup énoncent comme une évidence que (I_n) est minorée par 0.

8. (a) Il est attendu de mentionner les quatre fonctions u, u', v, v' de l'intégration par parties et de mentionner leur continuité.
   Des candidats dérivent $ln(1+e^{-nx})$ en $\dfrac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}$ pour retomber sur leurs pieds dans l'IPP (fausse) qui suit, avec souvent une entourloupe sur le signe.

   (b) Peu ont compris ce qu'il fallait justifier ici.

   (c) Les candidats ont souvent compris qu'il fallait intégrer par parties, mais certains dérivent $x \mapsto e^{-nx}$ plutôt que d'en prendre la primitive.

   (d) Les candidats ont bien compris la méthode, mais traitent mal le facteur n devant $\displaystyle\int_0^1 xe^{-nx}\mathrm{d}x$
   Et la limite de I_n est souvent donnée comme évidente, sans évoquer clairement le théorème d'encadrement.
   Le théorème des croissances comparées est parfois invoqué à tort pour justifier la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}$.
   Dans certaines justifications fantaisistes, l'implication suivante est donnée : puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$!

9. (a) Question facile, mais peu réalisée correctement. Il était attendu une fonction qui prenne deux variables en entrée, ce que quasiment tous les candidats se sont révélés incapables de faire.

Aucune boucle n'est nécessaire dans cette fonction. La commande `print` affiche un résultat dans la console mais ne permet pas d'utiliser cette fonction dans un autre script.

(b) Cette question est peu abordée. Certains conjecturent la croissance de la suite ou une comparaison entre les termes de cette suite et la valeur $0,83$.

Exercice 3

Ce troisième exercice porte sur l'étude de la loi d'une variable aléatoire à densité connaissance sa densité. Des questions d'informatique invitaient les candidats à simuler une telle variable aléatoire et à estimer une probabilité. Un début d'exercice assez classique se poursuivait avec des questions un peu plus délicates mais très détaillées permettant aux meilleurs candidats de se distinguer.

1. La définition d'une densité de probabilité est clairement bien connue. Cependant la mise en œuvre est laborieuse.
   Outre les erreurs de primitives, la principale erreur soulignée est d'écrire $\displaystyle\int_s^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_s^A f(t)\mathrm{d}t$.
   A nouveau le vocabulaire est trop imprécis: « f converge » au lieu de « $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ».
2. Il est attendu des candidats qu'ils sachent bien écrire la définition de $F(x)$ et donc qu'ils modifient la variable d'intégration. En effet trop souvent l'criture suivante est rencontrée « $\displaystyle\int_s^x f(x)\mathrm{d}x$ ».
3. Très peu pensent à utiliser le fait que F est une fonction de répartition.
   Trop recalculent F' sans réutiliser ce qui a été fait avant. Cela donne lieu en général à des calculs laborieux et trop souvent faux.
4. (a) Cette question est peu traitée correctement.
   Il manque en général la justification des limites aux bornes.
   (b) Cette question est très peu traitée.
   La simple mention de $\sqrt{\dfrac{1}{1-y}} > 0$ n'est pas suffisante.
   (c) Cette question a très peu été traitée. Mais dans certaines copies faible le calcul a été bien mené.
5. (a) Cette question de cours est peu réussie. Rappelons qu'il est peu envisageable de se lancer dans une telle épreuve sans connaître parfaitement le cours et en particulier ce type de question.
   Beaucoup écrivent correctement la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[a, b]$, sans nécessairement l'adapter à $[0, 1]$.
   (b) Cette question est un peu délicate. Elle est peu traitée.
   (c) Peu de candidats ont abordé cette question et en général ne l'ont pas comprise.
6. Cette question est peu traitée, mais jamais correctement! Certains pensent qu'il faut simplement faire un `return rd.random()` ou bien qu'il faut renvoyer la densité ou la fonction de répartition.
7. La définition de l'espérance est souvent connue. Les calculs souvent mieux menés qu'à la question 1.
   A nouveau la confusion entre borne finie et borne infinie. Quelques primitivations fantaisistes du type « $\ln(x^2)$ »

À nouveau une lecture attentive aurait permis à certains de répondre correctement à la question: certains pensent qu'on leur demande l'espérance d'une loi uniforme à cause des questions précédentes.

8. Certains candidats semblent étonnés que la réponse puisse être non. Certains candidats affirment qu'étant donné que la variable S admet une espérance, celle-ci admet également une variance. Implication des plus étonnante!
   Les difficultés de primitivation de la question 7 se retrouvent ici.
9. Cette question était facile, mais n'a pas souvent été traitée.
10. En général, les candidats ont bien identifié la loi binomiale et ses paramètres, mais peinent à justifier correctement leur réponse.
    D'autres, heureusement assez peu fréquents, voient ici une loi uniforme, voire géométrique...voire une loi de Poisson !!
11. Les candidats obtenant une variance différente de celle précisée sur l'énoncé, devraient mentionner l'erreur sur leur copie ou analyser leur résultat précédent.
12. Cette question est peu traitée.
    Ceux qui tentent cherchent souvent à calculer $P(N_n = 2)$.
13. (a) Cette question est en général bien traitée quand elle est abordée. Il fallait juste retrouver la formule donnant $E(S)$ dans le sujet.
    (b) Cette question est très peu traitée.
    (c) Cette question est très peu traitée.