2025

ANNALES

Mathématiques Technologiques



VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

CONCOURS ECRICOME PREPA

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE ..... PAGE 3

CORRIGÉ ... . PAGE 4

RAPPORT DU JURY ..... PAGE 19

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME. Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie 1

1. (a) $J = M - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$. Ainsi $J^2 = 3J$.

(c) $M = J + 2I$ et les matrices J et I commutent.

$$\begin{aligned} M^2 &= (J+2I)^2 \\ &= J^2 + 4J + 4I \qquad \text{car } I \text{ et } J \text{ commutent} \\ &= 3J + 4J + 4I \\ &= 7J + 4I \end{aligned}$$

Ainsi $M^2 = 7J + 4I$.

(d) D'après la question précédente et comme $J = M - 2I$, alors $M^2 = 7(M-2I) + 4I = 7M - 10I$.
Ainsi $M^2 = 7M - 10I$.

2. (a) D'après la question précédente, $M^2 - 7M + 10I = 0_3$, c'est à dire $R(M) = 0_3$.
Donc R est un polynôme annulateur pour la matrice M.

(b) $R(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$. Donc 2 est racine de R.
Par factorisation, $R(X) = (X-2)(X-5)$. Donc la seconde racine de R est 5.

(c) R est un polynôme annulateur de M donc ses racines sont les valeurs propres possibles de M.
Donc les valeurs propres possibles pour M sont 2 et 5.

3. Alors $M\,U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5U$.
Puisque U n'est pas nul, U est un vecteur propre pour M, associé à la valeur propre 5.

4. $M\,V = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2V$.
$M\,W = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2W$.
V et W sont non-nuls; Donc V et W sont des vecteurs propres pour M associés à la valeur propre 2.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

5. (a) $Q\,P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc $Q\,P = 3I$.

(b) D'après la question précédente, $\left(\frac{1}{3}Q\right).P = I$. Donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$.

(c) D'une part : $P\,D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

D'autre part : $M\,P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Donc $P\,D = M\,P$.

(d) Démontrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3}P\,D^n\,Q.$$

(I) $\frac{1}{3}P\,D^0\,Q = \frac{1}{3}P\,I\,Q = P\,(\frac{1}{3}Q) = P\,P^{-1} = I = M^0$.

Donc $M^0 = \frac{1}{3}P\,D^0\,Q$

(H) Soit n un entier naturel. Supposons que $M^n = \frac{1}{3}P\,D^n\,Q$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= M \times \frac{1}{3}P\,D^n\,Q \quad \text{Par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{3}MPD^nQ \\ &= \frac{1}{3}PDD^nQ \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{3}PD^{n+1}Q \end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3}P\,D^n\,Q$.

Partie 2

6. (a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 5(7\ a_n + b_n) + (-10\ a_n) \\ &= 25\ a_n + 5\ b_n \\ &= 5\ u_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison 5.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times 5^n = (5\ a_0 + b_0) \times 5^n$. Or $a_0 + b_0 = 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5^n$.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(b) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= -2(7\ a_n + b_n) - (-10\ a_n) \\ &= -4\ a_n - 2\ b_n \\ &= 2\ v_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison 2.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times 2^n = (-2\ a_0 - b_0) \times 2^n$. Or $a_0 - b_0 = -1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = -2^n$.

(c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_n &= 5a_n + b_n \\ v_n &= -2a_n - b_n \end{cases} &\iff \begin{cases} u_n + v_n &= 3a_n \\ 2u_n + 5v_n &= -3b_n \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_n &= \dfrac{1}{3}(u_n + v_n) \\ b_n &= -\dfrac{1}{3}(2u_n + 5v_n) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a_n &= \dfrac{1}{3}(5^n - 2^n) \\ b_n &= -\dfrac{1}{3}(2 \times 5^n - 5 \times 2^n) \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{1}{3}\left(5^n - 2^n\right)$ et $b_n = \dfrac{1}{3}\left(5 \times 2^n - 2 \times 5^n\right)$.

7. Montrons par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, $M^n = a_n M + b_n I$.

(I) $a_0 M + b_0 I = 0M + 1I = I$. Donc $M^0 = a_0 M + b_0 I$.

(H) Soit n un entier naturel. Supposons que $M^n = a_n M + b_n I$.
Par définition, $M^{n+1} = M^n\ M$.
Par hypothèse de récurrence, $M^{n+1} = (a_n M + b_n I).M = a_n M^2 + b_n M$.
Or $M^2 = 7M - 10I$ d'après la question 1(d).
Donc : $M^{n+1} = a_n(7M - 10I) + b_n M = (7a_n + b_n)M - 10a_n I$.
Par définition des suites (a_n) et (b_n), $M^{n+1} = a_{n+1} M + b_{n+1} I$.

Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = a_n M + b_n I$.

Partie 3

8. (a) Le premier jour, le chat se nourrit dans la maison 1 ; le deuxième jour, il se nourrit dans la même maison avec la probabilité $\dfrac{3}{5}$. Donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{3}{5}$.

Le deuxième jour, il se nourrit dans l'une des autres maisons de façon équiprobable, donc $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 3)$.

Or $\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 2) + \mathbb{P}(X_2 = 3) = 1$. Donc $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{5}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 3) = \dfrac{1}{5}$.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(b) $\mathbb{E}(X_2) = 1.\mathbb{P}(X_2=1) + 2.\mathbb{P}(X_2=2) + 3.\mathbb{P}(X_2=3) = \dfrac{3+2+3}{5}$.

Donc $E(X_2) = \dfrac{8}{5}$.

(c) $\mathbb{E}(X_2^2) = 1^2.\mathbb{P}(X_2=1) + 2^2.\mathbb{P}(X_2=2) + 3^2.\mathbb{P}(X_2=3) = \dfrac{3+4+9}{5} = \dfrac{16}{5}$.

$\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_2)^2 = \dfrac{16}{5} - (\dfrac{8}{5})^2 = \dfrac{80}{25} - \dfrac{64}{25}$.

Donc $\mathbb{V}(X_2) = \dfrac{16}{25}$ et $\sigma(X_2) = \sqrt{\mathbb{V}(X_2)} = \dfrac{4}{5}$.

9. (a) D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements associé à X_2:
$\Big((X_2=1),(X_2=2),(X_2=3)\Big)$,

$\mathbb{P}(X_3=1)$

$= \mathbb{P}(X_2=1)\times\mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3=1) + \mathbb{P}(X_2=2)\times\mathbb{P}_{(X_2=2)}(X_3=1) + \mathbb{P}(X_2=3)\times\mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3=1)$

Ainsi $\mathbb{P}(X_3=1) = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{11}{25}$.

De même $\mathbb{P}(X_3=2)$

$= \mathbb{P}(X_2=1)\times\mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3=2) + \mathbb{P}(X_2=2)\times\mathbb{P}_{(X_2=2)}(X_3=2) + \mathbb{P}(X_2=3)\times\mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3=2)$

Donc $\mathbb{P}(X_3=2) = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{25}$.

Et enfin $\mathbb{P}(X_3=3)$

$= \mathbb{P}(X_2=1)\times\mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3=3) + \mathbb{P}(X_2=2)\times\mathbb{P}_{(X_2=2)}(X_3=3) + \mathbb{P}(X_2=3)\times\mathbb{P}_{(X_2=3)}(X_3=3)$

Donc $\mathbb{P}(X_3=3) = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{7}{25}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X_3=1) = \dfrac{11}{25}$, $\mathbb{P}(X_3=2) = \dfrac{7}{25}$, $\mathbb{P}(X_3=3) = \dfrac{7}{25}$.

(b) Sachant que le troisième jour le chat est dans la troisième maison, la probabilité que le chat se soit nourri dans la deuxième maison le deuxième jour est :

$\mathbb{P}_{(X_3=3)}(X_2=2) = \dfrac{\mathbb{P}((X_2=2)\cap(X_3=3))}{\mathbb{P}(X_3=3)} = \dfrac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}{\frac{7}{25}} = \dfrac{1}{25}\times\dfrac{25}{7}$.

Ainsi $\mathbb{P}_{(X_3=3)}(X_2=2) = \dfrac{1}{7}$.

10. (a) Soit n un entier naturel.
D'après la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements associé à X_n:
$\Big((X_n=1),(X_n=2),(X_n=3)\Big)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \mathbb{P}(X_n=1)\times\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) + \mathbb{P}(X_n=2)\times\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_n=3)\times\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1) \\
&= \mathbb{P}(X_n=1)\times\frac{3}{5} + \mathbb{P}(X_n=2)\times\frac{1}{5} + \mathbb{P}(X_n=3)\times\frac{1}{5} \\
\text{De même } \mathbb{P}(X_{n+1}=2) &= \mathbb{P}(X_n=1)\times\frac{1}{5} + \mathbb{P}(X_n=2)\times\frac{3}{5} + \mathbb{P}(X_n=3)\times\frac{1}{5} \\
\text{et } \mathbb{P}(X_{n+1}=3) &= \mathbb{P}(X_n=1)\times\frac{1}{5} + \mathbb{P}(X_n=2)\times\frac{1}{5} + \mathbb{P}(X_n=3)\times\frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

Ainsi $C_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1}=1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n=1)\times\frac{3}{5} + \mathbb{P}(X_n=2)\times\frac{1}{5} + \mathbb{P}(X_n=3)\times\frac{1}{5} \\ \mathbb{P}(X_n=1)\times\frac{1}{5} + \mathbb{P}(X_n=2)\times\frac{3}{5} + \mathbb{P}(X_n=3)\times\frac{1}{5} \\ \mathbb{P}(X_n=1)\times\frac{1}{5} + \mathbb{P}(X_n=2)\times\frac{1}{5} + \mathbb{P}(X_n=3)\times\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

C'est à dire : $C_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n=1) \\ \mathbb{P}(X_n=2) \\ \mathbb{P}(X_n=3) \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times C_n = \frac{1}{5}\ M\ C_n.$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} = \frac{1}{5} M\ C_n$.

(b) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = \frac{1}{5^{n-1}}\ M^{n-1}\ C_1$.

(I) $\frac{1}{5^{1-1}}\ M^{1-1}\ C_1 = 1.I.C_1$.

Donc $C_1 = \frac{1}{5^{1-1}}\ M^{1-1}\ C_1$.

(H) Soit n un entier naturel non nul.

Supposons que $C_n = \frac{1}{5^{n-1}}\ M^{n-1}\ C_1$.

D'après la question précédente, $C_{n+1} = \frac{1}{5}\ M\ C_n$.

Par hypothèse de récurrence, $C_{n+1} = \frac{1}{5}\ M\ \left(\frac{1}{5^{n-1}}\ M^{n-1}\ C_1\right) = \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{5^{n-1}}\right)\left(M\ M^{n-1}\right)\ C_1$.

Donc $C_{n+1} = \frac{1}{5^n}\ M^n\ C_1$.

Ainsi par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = \frac{1}{5^{n-1}}\ M^{n-1}\ C_1$.

(c) Soit n un entier naturel non nul.

D'après la question précédente, $C_n = \frac{1}{5^{n-1}}\ M^{n-1}\ C_1$.

D'après le résultat admis à la partie 2,

$$C_n = \frac{1}{5^{n-1}}\ \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_1=1) \\ \mathbb{P}(X_1=2) \\ \mathbb{P}(X_1=3) \end{pmatrix}.$$

Alors $C_n = \frac{1}{5^{n-1}} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n & 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}-2^{n-1} & 5^{n-1}+2^n \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3.5^{n-1}}\begin{pmatrix} 5^{n-1}+2^n \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \\ 5^{n-1}-2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Donc $C_n = \frac{1}{3}\ \begin{pmatrix} 1+\frac{2^n}{5^{n-1}} \\ 1-\frac{2^{n-1}}{5^{n-1}} \\ 1-\frac{2^{n-1}}{5^{n-1}} \end{pmatrix}$.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{3}\left(1 + 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right),\ \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right),$$
$$\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right).$$

11. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X_n = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X_n = 3) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) + \frac{3}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(6 - 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) \\
&= 2 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_n) = 2 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

(b) Puisque $-1 < \frac{2}{5} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 2$.

Partie 4

12. Cette requête permet d'afficher le nom des chats, ainsi que leur numéro de puce, de couleur grise et de sexe femelle depuis la base `chats`.

13.
```
UPDATE proprietaires
SET nomchat = "Niels", pucechat = 987654321
WHERE idprop = 1234
```

14.
```
INSERT INTO chats
VALUES
(457, "Niels", "birmane", "M", "blanc", 1, 2, 987654321)}
```

15.
```
SELECT chats.nomchat, race, puce, nomprop, adresse
FROM chats INNER JOIN proprietaires
ON chats.puce = proprietaires.pucechat
```


Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

Exercice 2

Partie 1

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^x + (-\mathrm{e}^{-x}) = g(x)$ et $g'(x) = \mathrm{e}^x - (-\mathrm{e}^{-x}) = f(x)$.
   Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$.

2. (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{-x}) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^{-x}) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) > 0$.
   g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
g	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. (a) $g(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-x} \iff x = -x \iff x = 0$.
   Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $x = 0$.

   (b) D'après le tableau de variation et la question précédente,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

   (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{-x}) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^{-x}) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

   (d) $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = g'(x) = f(x)$.
   Le minimum de f est égal à 2. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ donc $f''(x) > 0$. Ainsi f est convexe sur $\mathbb{R}$.

4. $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = f'(x) = g(x)$.
   Or d'après la question 3(b), g est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$.
   Donc g est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

5. (a) Une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 est : $y = g'(0)(x-0)+g(0)$.
Or $g(0) = 0$ et $g'(0) = f(0) = 2$.
Donc la tangente (T) a pour équation : $y = 2x$.

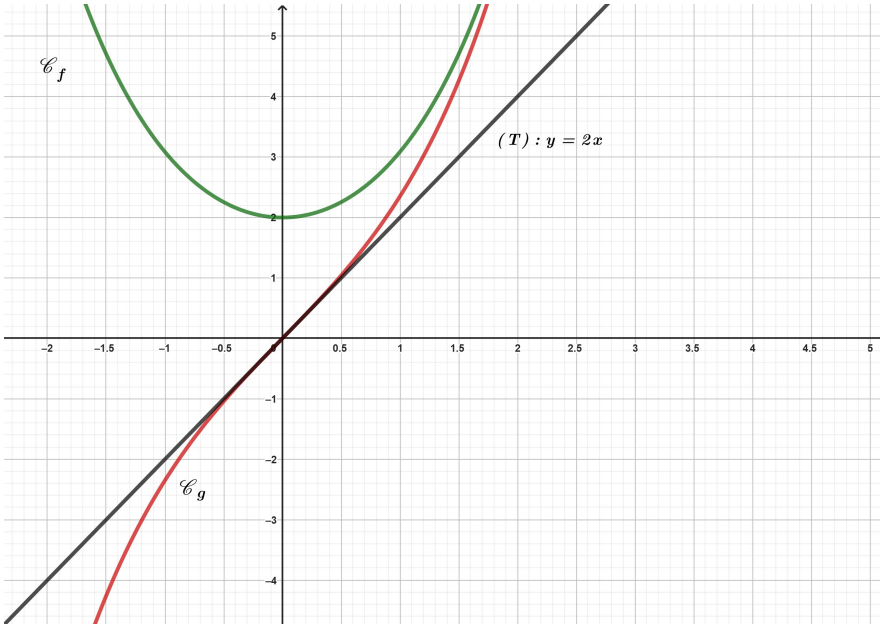
(b) Sur $]-\infty, 0]$, g est concave donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessous de (T).
Sur $[0, +\infty[$, g est convexe donc $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de (T).
g'' s'annule et change de signe en 0 donc le point $(0, 0)$ est un point d'inflexion pour $\mathscr{C}_g$.
Ainsi sur $\mathbb{R}_-$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessous de (T) et sur $\mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de (T)

(c) La courbe $\mathscr{C}_g$ a pour équation $y = g(x)$ et la tangente (T) a pour équation $y = 2x$.
Sur $]-\infty, 0]$ $\mathscr{C}_g$ est au-dessous de (T). Donc $\forall x \leqslant 0,\ g(x) \leqslant 2x$.
Sur $[0, +\infty[$ $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de (T). Donc $\forall x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 2x$.
Ainsi $\forall x \leqslant 0,\ g(x) \leqslant 2x$ et $\forall x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 2x$.

6. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, -\mathrm{e}^{-x} < 0 < \mathrm{e}^{-x}$, donc $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$, donc $g(x) < f(x)$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant g(x)$.

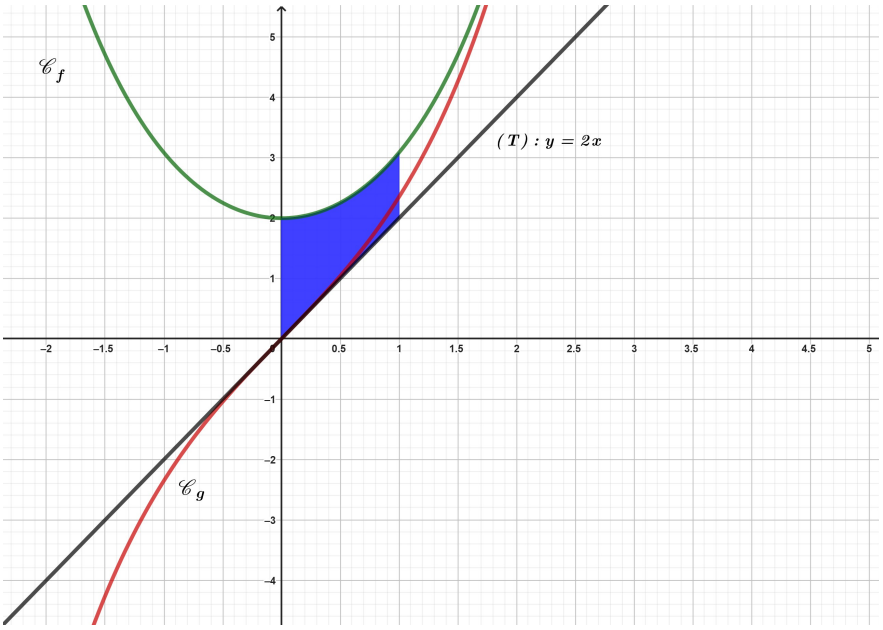
(b) Alors d'après la question précédente, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

7.



Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

8. (a)



(b) $\forall x \in [0,1], f(x) > 0$. Donc l'aire de la surface comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}]_0^1 = (\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}) - (\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-0}) = \mathrm{e} - \dfrac{1}{e}$.

L'aire de la surface comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\mathrm{e} - \dfrac{1}{e}$.

(c) $\forall x \in [0,1], f(x) > g(x) \geqslant 2x$, donc $f(x) - 2x \geqslant 0$. Donc $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 (f(x) - 2x)\,\mathrm{d}x$.

Or $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{1}{e}$ et $\displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\right]_0^1 = 1$.

Donc $\mathscr{A} = \dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}}$ (en unités d'aire).

9. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = f'(x) - 2x = g(x) - 2x$.

(b) D'après la question 5(c), $\forall x \leqslant 0,\ g(x) \leqslant 2x$, donc $g(x) - 2x \leqslant 0$.
$\forall x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 2x$, donc $g(x) - 2x \geqslant 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

avec $h(0) = f(0) - 2 - 0^2 = 2 - 2 - 0 = 0$.
Ainsi, le minimum de h est égal à 0. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geqslant 0$ ou encore $f(x) - 2 - x^2 \geqslant 0$.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 2 + x^2$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ k'(x) = g'(x) - 2 - x^2 = f(x) - 2 - x^2 = h(x)$.

(d) D'après la question 9.(b), $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \geqslant 0$ ou encore $k'(x) \geqslant 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
k		↗	0	↗	

avec $k(0) = g(0) - 0 - 0 = 0$.
La fonction k continue et strictement monotone définit une bijection et le tableau de variation permet de déduire les signes :

$\forall x \leqslant 0, k(x) \leqslant 0$ ou encore $g(x) - 2x - \frac{1}{3}x^3 \leqslant 0$. Et $\forall x \geqslant 0, k(x) \geqslant 0$ ou encore $g(x) - 2x - \frac{1}{3}x^3 \geqslant 0$.

Ainsi $\forall x \leqslant 0,\ g(x) \leqslant 2x + \frac{1}{3}x^3$ et $\forall x \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 2x + \frac{1}{3}x^3$.

Partie 2

10. Soit n un entier naturel non nul.
La fonction g continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Le réel $\frac{1}{n}$ admet donc un unique antécédent par g.

Ainsi l'équation $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution.

11. Le réel u_1 est défini par $g(u_1) = 1$.
Or $g(0) = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-0} = 0$ et $g(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1} \simeq 2,7 - 0,4 \simeq 2,3$. Donc : $g(0) < 1 < g(1)$ ou encore $g(0) < g(u_1) < g(1)$.
Or g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $0 < u_1 < 1$.

12. Soit n un entier naturel non nul.
$g(u_n) = \frac{1}{n}$ et $g(0) = 0$. Donc $g(u_n) > g(0)$.
Or g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

13. (a) Soit n un entier naturel non nul.
$g(u_n) = \frac{1}{n}$ et $g(u_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Or $n+1 > n > 0$ donc $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ ou encore $g(u_{n+1}) < g(u_n)$.
Or g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc $u_{n+1} < u_n$.

Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

(b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0.

D'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

14. (a)

```
def d(x,n):
    return np.exp(x)-np.exp(-x)-1/n
```

(b)

```
def SuiteU(n):
    U=np.zeros(n)
    for k in range(n) :
        a = 0 ; b = 1
        while b - a > 10**(-3) :
            c = (a + b)/2
            if d(a,k+1)*d(c,k+1) < 0 :
                b = c
            else :
                a = c
        U[k]= c
    return(U)
```

(c) On peut conjecturer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Exercice 3

Partie 1

1. (a) Une densité de T est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Son espérance est $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{1} = 1$;

Sa variance est $\mathbb{V}(T) = \dfrac{1}{1^2} = 1$.

(b) La fonction de répartition F_T est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

(c) La probabilité que le papillon vive au plus trois jours est : $\mathbb{P}(T \leqslant 3)$.
Or $\mathbb{P}(T \leqslant 3) = F_T(3) = 1 - \mathrm{e}^{-3}$.

Donc la probabilité que le papillon vive au plus trois jours est $1 - \mathrm{e}^{-3}$.

(d) Sachant que le papillon a déjà vécu une journée, la probabilité qu'il vive au moins un jour de plus est : $\mathbb{P}_{(T\geqslant 1)}(T \geqslant 2)$.

Or $\mathbb{P}_{(T\geqslant 1)}(T \geqslant 2) = \dfrac{\mathbb{P}((T \geqslant 1) \cap (T \geqslant 2))}{\mathbb{P}(T \geqslant 1)} = \dfrac{\mathbb{P}(T \geqslant 2)}{\mathbb{P}(T \geqslant 1)} = \dfrac{e^{-2}}{e^{-1}}$ (T est «sans viellissement»).

Ainsi : $\mathbb{P}_{(T\geqslant 1)}(T \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-1}$.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

2. (a) Une densité de U est la fonction f_U définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

La fonction de répartition F_U est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(-\ln(U) \leqslant x) = \mathbb{P}(\ln(U) \geqslant -x) = \mathbb{P}\left(U \geqslant \mathrm{e}^{-x}\right)$ par stricte croissance de la fonction exponentielle.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(U \geqslant e^{-x})$.

(c) $\forall x < 0$, $\mathrm{e}^{-x} > 1$.
Donc $\forall x < 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}\left(U \geqslant \mathrm{e}^{-x}\right) = 0$ car U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

Ainsi $\forall x < 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0$.

(d) **si** $x < 0$, $F_X(x) = 0$ d'après 2(c).
si $x = 0$, $F_X(0) = \mathbb{P}(U \geqslant 1) = 0$
si $x > 0$, alors $-x < 0$ et $0 < \mathrm{e}^{-x} < 1$ donc $F_X(x) = \mathbb{P}\left(U \geqslant \mathrm{e}^{-x}\right) = 1 - F_U(\mathrm{e}^{-x}) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ d'après la question 2(a).

Ainsi $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ Alors X suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Ainsi une densité de X est $f_X : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

(e)

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def SimulT() :
    return -np.log(rd.random())
```

Partie 2

3. (a) Soit $A > 0$. $I_1(A) = \displaystyle\int_0^A \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^A = 1 - \mathrm{e}^{-A}$.

Ainsi $I_1(A) = 1 - \mathrm{e}^{-A}$

(b) $\lim\limits_{A \to +\infty} (1 - \mathrm{e}^{-A}) = 1 - 0 = 1$.

Donc l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

4. Soit $A > 0$ et soit n entier naturel non nul n.
La fonction $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $[0, A]$ de dérivée $x \longmapsto nx^{n-1}$ continue.
La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable sur $[0, A]$ de dérivée $x \longmapsto -e^{-x}$ continue.

Par intégration par parties

$$\begin{aligned} I_{n+1}(A) &= \int_0^A x^n \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x \\ &= \left[-x^n.e^{-x}\right]_0^A - \int_0^A -nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= -A^n.\mathrm{e}^{-A} + n\int_0^A x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{A^n}{\mathrm{e}^A} + nI_n(A). \end{aligned}$$

Ainsi $I_{n+1}(A) = -\dfrac{A^n}{\mathrm{e}^A} + nI_n(A)$.

5. Soit n, un entier naturel non nul.
Supposons que $I_n(A)$ admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{A^n}{\mathrm{e}^A} = 0$
Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}(I_{n+1}(A)) = n \lim\limits_{A\to+\infty}(I_n(A))$, qui est une limite finie. Donc $I_{n+1}(A)$ admet aussi une limite finie.

6. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge.

(I) D'après la question 3b, l'intégrale définissant I_1 converge.

(H) soit n un entier naturel non nul. Supposons que l'intégrale définissant I_n converge, c'est à dire que l'intégrale $I_n(A)$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
Or d'après la question 5, $I_{n+1}(A)$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
Donc l'intégrale définissant I_{n+1} converge.

Ainsi par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul, l'intégrale définissant I_n converge.

Soit n un entier naturel non nul.
D'après la question 5, $\lim\limits_{A\to+\infty}(I_{n+1}(A)) = n.\lim\limits_{A\to+\infty}(I_n(A))$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = nI_n$.

7. On prouve par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = (n-1)!$.

(I) D'après la question 3b, $I_1 = 1$.
Et $(1-1)! = 1$.
Donc $I_1 = (1-1)!$.

(H) Soit n un entier naturel non nul.
Supposons que $I_n = (n-1)!$.
D'après la question précédente, $I_{n+1} = nI_n$.
Par hypothèse de récurrence, $I_{n+1} = n(n-1)! = n!$.

Donc par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = (n-1)!$.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

Partie 3

8. **positivité**

$\forall x < 0,\ f_n(x) = 0$, donc f_n est positive sur $]-\infty, 0[$.

$\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}$, avec $(n-1)! > 0$ et $x^{n-1} \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc f_n est positive sur $[0, +\infty[$.

Ainsi f_n est positive sur $\mathbb{R}$.

continuité

Sur $]-\infty, 0[$, f_n est constante donc f_n est continue ;

Sur $]0, +\infty[$, f_n est produit et composée de fonctions continues donc f_n est continue.

Ainsi, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

intégrale

$\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\ \mathrm{d}x$ converge et vaut 0 ;

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ converge et vaut $I_n = (n-1)!$ donc $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)!}.(n-1)! = 1$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

Ainsi f_n est une densité de probabilité.

9. (a) Remarquons que $\forall x \in [0, +\infty[,\ xf_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}x^n e^{-x} = \dfrac{1}{(n-1)!}f_{n+1}(x)$.

Or $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut $n!$. Par ailleurs, $\forall x < 0,\ xf_n(x) = 0$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

Donc Y admet une espérance. Et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n$. Donc $\mathbb{E}(Y) = n$.

(b) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(F_N) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}(Y_k)$.

Or pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, Y_k suit la même loi que Y.

Alors $\mathbb{E}(F_N) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{N}.N.n = n$. Donc $\mathbb{E}(F_N) = n$.

Les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_N$ suivent la même loi que Y et sont indépendantes.

Donc $\mathbb{V}(F_N) = \dfrac{1}{N^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\mathbb{V}(Y_k) = \dfrac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{N^2}.N.n = \dfrac{n}{N}$.

Donc $\mathbb{V}(F_N) = \dfrac{n}{N}$.

(c) On applique l'inégalité à la variable aléatoire F_N qui admet une espérance et une variance:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|F_N - \mathbb{E}(F_N)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(F_N)}{\varepsilon^2}$$

Ou encore $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(|F_N - n| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{n}{N\varepsilon^2}$

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(d) F_N semble converger vers 3, c'est à dire qu'on peut estimer $\mathbb{E}(F_N) = 3$. Or $\mathbb{E}(F_N) = n$.
Donc on peut estimer la valeur $n = 3$.

(e) Pour $\varepsilon = 0,1$, $N = 600$ et $n = 3$, l'inégalité obtenue en 9(c) donne : $\mathbb{P}\Big(|F_{600} - 3| \geqslant 0,1\Big) \leqslant \dfrac{3}{600 \times (0,1)^2}$,
c'est à dire $\mathbb{P}\Big(|F_{600} - 3| \geqslant 0,1\Big) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou encore $\mathbb{P}\Big(|F_{600} - 3| \leqslant 0,1\Big) \geqslant 1 - \dfrac{1}{2}$.
Donc $\mathbb{P}\Big(F_{600} - 0,1 \leqslant 3 \leqslant F_{600} + 0,1\Big) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Les intervalles de confiance proposés le sont avec un niveau de confiance de $\dfrac{1}{2} = 0,5$, ce qui est faible. C'est pourquoi la probabilité que $n = 3$ n'appartienne pas à un intervalle de confiance reste importante et certains intervalles ne contiennent pas la valeur de n.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

RAPPORT D'ÉPREUVE

1 Remarques globales

1.1 Forme

Nous rappelons une nouvelle fois qu'une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire. Elle permet de comprendre la problématique de chaque exercice et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles. On a pu constater que de nombreux candidats ne traitent pas, ou faussement, les nombreuses questions de cours. Celles-ci sont insérées dans le sujet avec l'objectif de permettre aux candidats moyens mais sérieux, ayant convenablement préparé le concours, d'obtenir des points récompensant leurs efforts. Les candidats qui ne réussissent pas ces questions de vérification de connaissances ne peuvent évidemment pas espérer obtenir une note finale satisfaisante.

De manière générale, les copies sont propres, soignées, les résultats sont mis en évidence. Les candidats ont fait un vrai effort de mise en forme propre, avec une numérotation et une pagination respectées. Les rares copies dans lesquelles la présentation est incorrecte, la numérotation non respectée sont alors rapidement identifiées.

On insiste sur le fait que la numérotation des questions n'est pas optionnelle, même si certains candidats ont tendance à l'oublier au fur et à mesure de leur composition. Attention aussi à la façon de numéroter une sous-question : un (b) est implicitement relatif au dernier numéro écrit en chiffre arabe : lorsque qu'un candidat passe directement de la question 9.(a) à la question 10.(b), il est sensé le préciser, et non se contenter d'écrire (b). Dans le même ordre d'idée, intituler «Partie 2» une question est équivoque. Il est de plus recommandé de prévenir le correcteur lorsqu'un exercice abandonné est repris en fin de copie.

Nous ajouterons aussi qu'il faut éviter les abréviations en particulier si elles sont obscures.

Enfin nous avons pu voir dans certaines copies que la rédaction des notions mathématiques est souvent approximative, confuse ou franchement abusive ($e^{-\infty} = 0$ par exemple). Beaucoup de candidats ne lisent pas correctement les questions et ne répondent pas exactement ou complètement («En déduire que P est inversible ET exprimer P^{-1}»). La rédaction des différentes étapes d'un raisonnement par récurrence peut être négligente. Une conclusion, de même, ne peut pas être une phrase sans verbe ou se résumer à un schéma peu lisible, comme un tracé approximatif pour indiquer qu'une fonction est convexe / concave.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 5,36, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

1.2 Fond

De manière générale, de nombreux candidats commencent leur raisonnement en énonçant la conclusion sans préciser que c'est le but à atteindre. Pour rappel, seules les données de l'énoncé ou les résultats préalablement établis peuvent être (à la rigueur) énoncés sans précaution (idéalement, il faudrait cependant pouvoir lire « d'après l'énoncé » ou « d'après la question ... »).

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

On constate aussi un grand manque de cohérence entre des résultats donnés par les candidats sur des questions qui se suivent : une fonction strictement croissante à une question qui devient strictement décroissante à la question suivante ou une fonction qui change de signe à une question et qui devient positive à la question suivante (questions sur la convexité dans l'exercice 2 par exemple)

Enfin voici quelques éléments importants rencontrés au fil des copies :

- L'utilisation de parenthèses pour prioriser les additions sur les multiplications semble optionnelle pour certains candidats.
- Une confusion entre les opérations suivantes: multiplication et addition. Cette confusion est certainement liée à un manque de soin dans l'écriture les croix symbolisant l'addition «+ » et la multiplication «×» ont tendance soit à se pencher soit à se redresser. Quelque soit la raison de cette confusion, elle est fortement préjudiciable pour les candidats.
- De nombreux candidats ont des difficultés à différencier une égalité d'une équivalence.
- Il est dommage de contredire l'énoncé (nous avons vu plusieurs fois « donc $MP \neq PD$ »)
- Les candidats doivent penser à préciser le nom du théorème ou de la propriété utilisée lorsque c'est possible (« Formule des probabilités totales », « Théorème de la limite monotone », etc ...)
- Beaucoup de candidats ont de grandes difficultés à prouver qu'une suite est géométrique.
- En ce qui concerne la rédaction des raisonnements par récurrence :
  - ⋆ la rédaction de l'initialisation est rarement parfaite ; s'il s'agit généralement d'une partie assez facile du raisonnement, il convient néanmoins de la traiter rigoureusement, et en particulier de bien la conclure.
  - ⋆ pour l'hérédité, l'erreur consistant à supposer la proposition vraie pour tout entier est commise par un nombre de candidats non négligeable, et a été fortement pénalisée ;
  - ⋆ la conclusion est souvent donnée sans être titrée, contrairement aux deux autres étapes du raisonnement ; elle est parfois confondue avec la conclusion de l'hérédité.
- La notion de probabilité conditionnelle n'est pas toujours acquise.
- La syntaxe SQL est ignorée par la majorité des candidats.
- Des calculs d'intégrales simples et classiques sont souvent laborieux.

2 Remarques question par question

Exercice 1

Partie 1

1. (a) Cette question est en général bien traitée.
   (b) Cette question est en général bien traitée, mais non terminée. L'expression de J^2 en fonction de J est non faite.
   Certains candidats ne maîtrisent pas les calculs matriciels élémentaires et peuvent conclure « $J = 3$ », ou encore pour certains, le carré d'une matrice est la matrice des carrés des coefficients.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(c) Cette question est traitée par une moitié des copies.
Certains s'arrêtent à $M^2 = (2I+J)^2$.D'autres partent d'expressions fausses comme $M = J-2I$ ou $M = -J - 2I$.
On a vu certains candidats calculer M^2 et deviner les coefficients plutôt que d'utiliser le développement de $M^2 = (2I + J)^2$.

(d) Cette question est correctement traitée.
En général les candidats ont établi l'égalité demandée par le calcul.

2. (a) En général, cette question a été bien traitée.
Quelques réponses ne présente aucun intérêt ou sont farfelues du type « R est un polynôme de degré 2 » ou « R est un polynôme pour M ». Précisons qu'il est questin d'« un » polynôme annulateur et non pas « du » polynôme annulateur

(b) En général les candidats ont répondu à la question par le calcul du discriminant.Certains par ce calcul ne trouvent pas 2 comme racine et ne réagissent pas; ou alors donnent 3 racines ! Quelques rares élèves font par factorisation ou par la formule avec le produit des racines.

(c) En général, cette question est bien traitée.
Une partie non négligeable des candidats donne les racines comme étant forcément des valeurs propres.

3. De nombreux étudiants calculent MU et concluent directement, sans faire apparaître $5U$. D'autres oublient de conclure.

Beaucoup oublient de vérifier que $U \neq 0$. ou quand ils le font, le font trop tard, de sorte qu'on peut lire « U est un vecteur propre non nul ».

Certains confondent valeur propre et vecteur propre.

4. Cette question est en général bien traitée, mais des candidats oublient d'observer que $MV = 2V$ et $MW = 2W$ avant de conclure.

5. (a) Cette question est en général bien traitée.

(b) Pour prouver que P est inversible, seuls quelques uns pensent à mettre en évidence une matrice dont le produit avec P est l'identité.

Certains candidats passent par un pivot de Gauss pour l'inversibilité (en général juste) et pour le calcul de l'inverse (en général faux)

(c) Cette question est en général bien traitée.

(d) Deux méthodes correctes ont été rencontrées pour l'hérédité: passage par la diagonalisation de M en écrivant $M = PDP^{-1}$, ou utilisation de l'égalité de la question précédente.

Dans l'initialisation, l'égalité $\frac{1}{3}PD^0Q = I$ n'est pas souvent justifiée rigoureusement.
La nature des objets manipulés n'est pas toujours bien identifiée, en particulier ces inégalités sont fausses: $M^0 = 1$ ou 0.

Beaucoup trop s'arrangent avec les produits matriciels et en particulier ne savent que faire avec $\frac{1}{3}$ ou font commuter des matrices à leur guise Certains oublient de justifier que $M = \frac{1}{3}PDQ$.
Un certain nombre de candidats sont persuadés que M^n se calcule en prenant les puissances des coefficients de M puis essaient de vérifier l'égalité par produit matriciel de $\frac{1}{3}PD^nQ$.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

Partie 2

6. (a) Cette question est abordée par une bonne moitié des copies.
Mais trop souvent, les candidats ne vont pas au bout de la question soit en oubliant la dernière partie soit en ne calculant pas la premier terme de la suite.
Certains candidats calculent u_0, u_1 et u_2 pour en conclure que la suite est géométrique...
Et d'autres candidats calculent $u_{n+1} - u_n$, confondant avec l'étude des variations de la suite.

   (b) La distributivité (développement de $-2(7a_n + b_n)$) a représenter un obstacle pour un certain nombre de candidats.

   (c) Cette question est peu traitée.
De rares candidats comprennent qu'il s'agit de résoudre un système linéaire et se lancent dans la recherche de b_n après avoir trouvé a_n mais soit ils n'aboutissent pas soit ils concluent de façon abusive.
Certains étudiants astucieux sont partis des expressions $\frac{1}{3}(5^n - 2^n)$ et $\frac{1}{3}(5 \times 2^n - 2 \times 5^n)$ pour reconnaître $\frac{1}{3}(u_n + v_n)$ et $\frac{1}{3}(-5v_n - 2u_n)$ et obtenir ainsi rapidement a_n et b_n en remplaçant u_n et v_n.
Enfin, pour certains candidats, $5 \times 2^n - 2 \times 5^n = 10^n - 10^n = 0$.

7. L'initialisation est en général bien faite.

Par contre beaucoup de bluff sur l'hérédité.
Les indices sont trop souvent confondus avec des puissances et les écritures suivantes sot fausses: $a_{n+1} = a_n a$ ou $a_n a_1$ ou $a_n + a_1$.
Un nombre important de candidats lit mal la question et se lance dans le calcul explicite de M^n, perdant ainsi un temps précieux.
Certains utilisent l'expression admise pour tenter d'échafauder leur raisonnement par récurrence.

Partie 3

8. (a) L'équiprobabilité est citée dans une bonne moitié des copies.
Mais peu justifie clairement les deux dernières probabilités, certains candidats se contentant de dire à quoi correspondent les événements $[X_2 = 1]$, $[X_2 = 2]$, $[X_2 = 3]$.

   (b) Cette question est en général bien traitée.Mais des erreurs de calcul indiquent une mauvaise manipulation des fractions: $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{125}$ ...

   (c) Pour certains certains candidats $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2)$.
D'autres candidats calculent l'espérance et la variance de X_2 comme si elle suivait une loi binomiale.
Enfin trop oublient de lire la question jusqu'au bout et donc ne déterminent pas l'écart type.

9. (a) Cette question est traitée par une moitié des copies.

Si certains utilisent proprement la formule des probabilités, d'autres décomposent les événements considérés, mais ne précisent pas l'incompatibilité des événements pour poursuivre leur calcul, ni ne font apparaître les probabilités conditionnelles, d'autres encore n'écrivent qu'une série de calculs sans aucune justification ou lien avec des propriétés.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

Certains candidats, du fait de « l'équiprobabilité », considèrent qu'il s'agit d'une loi uniforme, d'autres considèrent que c'est une loi binomiale car il y a une répétition de jours avec une même expérience « manger dans l'une des 3 maisons ».

(b) Soit la question est bien traitée, soit le calcul ne va pas dès le début, (beaucoup de fois $\frac{1}{5}$ comme résultat).
De nombreux candidats peinent à reconnaître que c'est $\mathbb{P}_{[X_3=3]}(X_2=2)$ qui est demandée.
Rappelons qu'une intersection portent sur des événements ou des ensembles mais pas sur des probabilités, ainsi cette écriture est fausse « $\mathbb{P}(X_3=3)\cap\mathbb{P}(X_2=2)$ ».
Dans cette question, les variables aléatoires X_2 et X_3 ne sont pas indépendantes, donc l'inégalité « $\mathbb{P}((X_3=3)\cap(X_2=2))=\mathbb{P}(X_3=3)\times\mathbb{P}(X_2=2)$ ». est a priori fausse.

10. (a) Pour un grand nombre de candidats, prouver l'égalité $C_{n+1}=\frac{1}{5}MC_n$ revient à développer le produit MC_n.
Peu de candidats ont vu qu'ils pouvaient réitérer le raisonnement fait sur X_3, et donc rares sont les copies qui utilisent proprement la formule des probabilités totales.

(b) Cette question est traitée par la moitié des candidats, la récurrence y est bien faite.

(c) Cette question est peu traitée.
Lorsqu'elle est étudiée, de nombreux candidats cherchent absolument à répondre une loi usuelle : binomiale, uniforme ou géométrique.
Ceux ayant la bonne méthode, commettent souvent des erreurs de calculs pour simplifier l'expression des probabilités par exemple $\frac{1}{3}\times\frac{1}{5^{n-1}}\left(5^{n-1}+2^n\right)$ devient $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times 2^n$

11. (a) Cette question est rarement traitée, mais les résultats sont trop souvent non simplifiés à la fin.

(b) Cette question est traitée, en général, par ceux qui ont traité la question précédente. La condition $-1<\frac{2}{5}<1$ est en général bien rappelée.

Partie 4

12. C'est la question la mieux traitée parmi les questions de SQL. Parmi les candidats donnant une réponse cohérente, la moitié oublie de mentionner que l'on projette aussi le numéro de la puce.
13. Cette question est très souvent abordée, mais souvent n'importe comment.
Beaucoup donnent les tables de la base de données en rajoutant la valeur de l'identifiant et du numéro de la puce dans ces tables.
14. Cette question est très souvent abordée, mais souvent n'importe comment. Beaucoup de candidats inventent des balises SQL !
15. Réponse fournie en général: `FROM Chats proprietaires` Pour ceux qui n'étaient pas trop loin de la bonne réponse, souvent vu `FROM chats AND proprietaires` et `FROM chats, proprietaires` La plupart des candidats inventent une syntaxe SQL qui leur est visiblement inconnue.

Exercice 2

Partie 1

1. Cette question est en général bien traitée. Quelques rares étudiants ne savent pas dériver $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ ou utilisent la formule de dérivation d'un produit.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

2. (a) En général, la limite en $+\infty$ est correcte. Mais $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ ou $-\infty$.

   Beaucoup de rédactions abusives du type "$+\infty + 0 = +\infty$" ou "$e^{+\infty} = +\infty$".
   Certains invoquent le théorème des croissances comparées ; d'autres trouvent la bonne réponse mais avec des justifications fausses, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = +\infty$.

   (b) On croise trop souvent les variations (justes ou fausses) sans justification sur le signe de la dérivée.
   Des études du signe de la dérivée sont parfois menées à l'aide d'un tableau, de sorte qu'il semble être obtenu en appliquant la règle des signes à une somme.
   Quelques fois, des variations de g ne sont pas toujours en cohérence avec le signe de g' annoncé, et aussi des incohérences entre leur tableau de variations et les limites calculées, sans que les candidats n'en soient perturbés !

3. (a) Cette question est abordée par une bonne moitié des copies.
   Trop souvent les candidats partent de l'égalité $g(x) = 0$ pour aboutir après de longs calculs à $e^x = e^x$ ou encore à $0 = g(x)$ ou à $x = -x$ mais sans donner la valeur de x.
   Des manipulations maladroites ou incorrectes de ln aboutissent aux conclusions suivantes : $x = -1$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = e^{-1}$.
   Ou encore, l'égalité $e^x - e^{-x} = 0$ qui se transforme (trop!) souvent en $\ln(e^x) - \ln(e^{-x}) = \ln(0) = 0$.
   Certains candidats font preuve d'une grande créativité dans ce qu'il ne faut pas faire dans un calcul et finissent avec un résultat qui n'a aucun sens, comme $x = \ln$.
   Et enfin, des erreurs entre image et antécédent, des candidats calculant directement $g(0)$.

   (b) Le tableau de signe n'est pas toujours en cohérence avec les variations de g données à la question 2.(b).

   (c) Si dans un bon nombre de copies, les variations de f sont correctes, dans d'autres assez nombreuses aussi il est écrit que «comme $f' = g$ et que $g' = f$, alors f et g ont même variations» , ou encore dans d'autres copies, le tableau de variations est très étrange et sans lien avec les questions précédentes.
   Les limites trouvées ne sont pas toujours cohérentes avec le tableau de variations.

   (d) Le calcul de $f''(x)$ est souvent correct mais la cohérence entre signe et convexité pas toujours assurée.
   Certains candidats ont trouvé une fonction f qui changeait de signe dans la question précédente et qui vont dire que f est positive ici sans sembler trouver ça perturbant.

4. Cette question est peu traitée, et quand elle est traitée, les réponses sont assez farfelues.

5. (a) Petit florilège de ce qui a été rencontré :
   - ⋆ Trop d'équations de la forme $(T) = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
   - ⋆ Des équations de tangentes assez surprenantes: $y = f'(0)(x - 0) - f(0)$ ou $y = f(0)(x - 0) + f'(0)$ ou $y = f'(0)(x - 0)f(0)$.
   - ⋆ Et même avec une expression formelle correcte et des valeurs de $g'(0)$ et de $g(0)$ correctes, l'équation finale obtenue a souvent été $y = 2$ ou $y = x + 2$.

   (b) Cette question est rarement traitée. En général, les candidats tentent d'étudier la fonction $x \longmapsto g(x) - 2x$.
   Le lien entre convexité et position relative courbe / tangente est visiblement très peu connu.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(c) Cette question est rarement traitée.
Souvent les candidats paraphrasent l'énoncé pour conclure.

6. (a) Cette question est abordée par une bonne moitié des copies et en général bien traitée.
(b) Cette question est abordée par la quasi totalité des élèves ayant traité la 6.(a).

7. Cette question est bien trop rarement traitée.
La position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport $\mathscr{C}_g$ est le point le plus respecté. Dans un tracé de courbe, les axes devraient être gradués et fléchés. Le tracé de la droite (T) n'est pas toujours en cohérence avec l'équation obtenue, voire même rarement tangente à $\mathscr{C}_g$.

8. (a) Cette question est, en général, traitée par ceux ayant effectué les tracés de la question 7.
La zone délimitée est souvent l'aire sous la courbe de $\mathcal{C}_f$, sans tenir compte de (T).
(b) Cette question est rarement traitée.
Quand elle l'est, le lien entre l'aire demandée et l'intégrale n'est pas clairement établi. La positivité de f n'a jamais été évoquée par les quelques candidats qui ont lancé un calcul intégral.
(c) Cette question est très rarement traitée.
Dans les meilleures copies, l'aire $\mathscr{A}$ est calculée directement, et la question 8.(b) n'a pas été perçue comme une aide.

9. (a) Le calcul est en général correct.
(b) Cette question est peu traitée.
Quand elle l'est, elle se résume à une succession d'inégalités sans lien entre elles.
(c) Cette question est souvent abordée.
La dérivée de $x \longmapsto x^3$ pose problème, comme la gestion du produit de $\frac{1}{3}.3$ ou encore l'expression $-2 - \frac{1}{3}3x^2$ qui devient $6x$.
(d) Cette question est peu traitée.
Quand elle l'est, c'est souvent incohérent.

Partie 2

10. Beaucoup ne voient pas qu'on attend ici le théorème de la bijection et se lancent dans une résolution directe périlleuse et fantaisiste.
Pour ceux qui partent dans la bonne direction, des arguments manquent souvent : comme $\frac{1}{n} \in g(\mathbb{R})$ ou la stricte monotonie.

11. Cette question est peu traitée.
Certains répondent à cette question en prouvant par récurrence que $u_n \in]0,1[$.
Beaucoup de candidats considèrent que $g(u_n) = \frac{1}{u_n}$ ou que $u_n = \frac{1}{n}$

12. Beaucoup de ceux qui abordent cette question tentent une récurrence.

13. (a) Cette question est peu traitée.
La résolution se résume trop souvent à l'étude du signe de $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, avec encore une fois la confusion entre $u_{n+1} - u_n$ et $g(u_{n+1}) - g(u_n)$.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(b) Cette question est peu traitée, mais quand elle est abordée, elle est correcte,même si une partie des candidats oublie de préciser la valeur d'un minorant.

14. (a) Cette question est très peu et très mal traitée. La syntaxe `def / return` est largement ignorée.

(b) Cette question est traitée par la moitié des candidats. Quand elle est traitée, le candidat s'est souvent contenté de recopier le programme donné sans le compléter.
Trop souvent les réponses proposées n'ont absolument aucun sens, la dichotomie n'est clairement pas maîtrisée par les candidats.

(c) Cette question est traitée par un tiers des candidats.

Exercice 3

Partie 1

1. (a) Cette question de cours n'est pas réussi à la hauteur des attentes. Elle montre que le cours n'est pas connu pour beaucoup trop de candidats.
L'espérance et la variance sont généralement bien connues lorsque le candidat pense à répondre entièrement à la question.

(b) La fonction de répartition est en général mieux connue que la densité demandée à la question précédente.

(c) Quand elle est abordée, cette question est plutôt bien traitée. Mais les notations doivent être respectées: ici il n'y a pas encore de variable aléatoire X.

(d) De nombreux candidats ont rencontré des difficultés à bien comprendre l'énoncé et à trouver la bonne probabilité à calculer.
Une réaction des candidats est attendue quand ils trouvent une probabilité négative.

2. (a) A nouveau cette question de cours n'est pas bien réussi. Nous ne pouvons qu'inviter les futurs candidats à bien connaître les différentes définitions, les multiples propriétés et les nombreux théorèmes du cours.

Il faut penser à remplacer a et b par 0 et 1 dans les formules.

(b) De manière générale, aucune justification n'est donnée pour les opérations effectuées ou très rarement. Certains confondent la positivité de la fonction exponentielle et sa croissance (utilisée ici).
Des calculs parfois assez étranges montrent un manque de maîtrise des calculs sur les fonctions ln et e: par exemple: $-\ln(e^U) = \dfrac{1}{U}$ ou encore
$e^{-\ln(U)} = -U$

(c) Rares ont été les justifications correctes.

(d) Cette question est très peu et très mal traitée. Les candidats peinent à mener le calcul de $F_U(e^x)$ en séprant les trous cas $x < 0$, $0 < x < 1$ et $x > 1$.

(e) Cette question est rarement traitée.

2.1 Partie 2

3. (a) Cette question est traitée par pratiquement toutes les copies. En général la primitive est correcte, mais la gestion des signes ensuite pose problème.
Il n'y avait pas de limite à calculer à cette question. Des confusions entre $\int_0^A$ et $\int_0^{+\infty}$.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.

(b) Cette question est souvent abordée, en mélangeant parfois la limite de $I_1(A)$ et $I_1(A)$, et s'arrêtant parfois à la valeur et sans se préoccuper de la convergence.

4. Cette question est souvent abordée et plutôt correctement.
   Quelques fois le choix des fonctions à dériver ou intégrer est malheureux et ne permet pas d'aboutir au résultat souhaité.
   Trop de candidats lancent l'intégration par parties dans $I_n(A)$ au lieu de $I_{n+1}(A)$.
   Et malheureusement encore des mélanges dans les primitives et dérivées de $x \mapsto x^n$.
5. Cette question est très peu traitée. Quand elle l'a été, on a vu des confusions entre la convergence de I_n en tant qu'intégrale ($\lim_{A\to+\infty}$) par rapport à la convergence de la suite (I_n) ($\lim_{n\to+\infty}$).
6. Cette question est très peu traitée, et faite très maladroitement,avec beaucoup de baratins n'aboutissant à rien.
7. Cette question n'est quasiment pas traitée.

Partie 3

8. Cette question est souvent abordée. Les propriétés à vérifier pour prouver une densité sont bien connues.
   Trop de candidats affirment que la fonction est continue sur $\mathbb{R}$ sans rien vérifier en 0. D'autres au contraire se préoccupent de la continuité en 0 qui est inutile.
   La valeur de l'intégrale pose souvent problème. Quasiment aucun candidat ne réussit à faire le lien avec l'expression de I_n donnée à la question 7.
9. (a) Cette question est assez peu abordée. Les candidats se contentent d'indiquer la formule en cas de convergence. Très peu arrivent à prouver la convergence et trouver la valeur de l'espérance.
   Des candidats lisent mal le sujet (encore !) et se lancent dans le calcul de $\mathbb{V}(Y)$.
   (b) La confusion entre n et N conduit les rares candidats qui abordent cette question à obtenir des résultats faux.
   Certains candidats mènent les calculs (à peu près) correctement mais négligent de préciser les propriétés utilisées (linéarité de l'espérance, indépendance des variables).
   (c) Cette question est très peu traitée car suivant la question 9.(b) peu réussie.
   (d) Souvent la bonne réponse est donnée, sans beaucoup de justification.
   (e) Cette question est très peu traitée et avec un baratin incompréhensible.

Les sujets et corrigés publiés ici sont la propriété exclusive d'ECRICOME.
Ils ne peuvent être reproduits à des fins commerciales sans un accord préalable d'ECRICOME.