

**CONCOURS
ECRICOME**

**PRÉPAS
ECG/ECT**

ACCESSIBLE AUX CPGE ECG
OU ECT

2026

ANNALES

Mathématiques technologiques

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

VOIE ÉCONOMIQUE ET
COMMERCIALE
voie Technologique

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE	PAGE 3
CORRIGÉ	PAGE 4
RAPPORT D'ÉPREUVE	PAGE 20

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

■ SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

■ ÉVALUATION

- Les exercices sont pondérés relativement à leur longueur et leur difficulté.
- En particulier l'exercice 2 était assez significativement plus long, la part du barème attribué à cet exercice est un peu plus importante que celle de l'exercice 3 et bien plus importante que celle de l'exercice 1.

■ ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie 1

1. (I) Pour $n = 0$: $a_0 + b_0 = 1 + 0 = 1$.

(H) Soit n un entier naturel. Supposons que $a_n + b_n = 1$.

$$\text{Or } a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{7}{10}a_n + \frac{1}{10}b_n + \frac{3}{10}a_n + \frac{9}{10}b_n.$$

Donc $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n = 1$, par hypothèse de récurrence.

Ainsi $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$

Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $a_n + b_n = 1$.

2. (a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{7}{10}a_n + \frac{1}{10}b_n \\ &= \frac{7}{10}a_n + \frac{1}{10}(1 - a_n) \quad \text{d'après la question 1.} \\ &= \frac{6}{10}a_n + \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{5}a_n + \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{1}{10}$.

(b)

$$\begin{aligned} \ell = \frac{3}{5}\ell + \frac{1}{10} &\iff \ell - \frac{3}{5}\ell = \frac{1}{10} \\ &\iff \frac{2}{5}\ell = \frac{1}{10} \\ &\iff \ell = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi l'équation $\ell = \frac{3}{5}\ell + \frac{1}{10}$ admet une unique solution $\ell = \frac{1}{4}$.

(c) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{5}a_n + \frac{1}{10} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{5}\left(v_n + \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{20} \\ &= \frac{3}{5}v_n + \frac{3}{20} - \frac{3}{20} \\ &= \frac{3}{5}v_n \end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

(d) Remarquons que $v_0 = a_0 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
 Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \left(\frac{3}{5}\right)^n \quad \text{car } (v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ \text{Alors } a_n &= v_n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

3. (a) Soit n un entier naturel.

$$b_n = 1 - a_n = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Donc, pour tout entier naturel n , $b_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

(b) Puisque $-1 < \frac{3}{5} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}(0) = \frac{3}{4}.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{3}{4}$.

4.

```
def rang(s):
    b = 0
    n = 0
    while b < s :
        n = n + 1
        b = 3/5 * b + 3/10
    return n
```

Partie 2

5. (a) $QP = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = 12 I_3$; où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Ainsi $QP = 12 I_3$.

(b) D'après la question précédente $\left(\frac{1}{12}Q\right) P = I_3$.

Donc P est inversible avec $P^{-1} = \frac{1}{12}Q$.

6. (a) Les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont non nuls.

Et $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 10.

$M \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 6.

$M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 10.

(b)

$$\begin{aligned}
 \text{Par calcul, } PDP^{-1} &= \frac{1}{12}PDQ \\
 &= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 84 & 12 & 12 \\ 36 & 108 & -12 \\ 0 & 0 & 120 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\
 &= M.
 \end{aligned}$$

Ainsi $PDP^{-1} = M$.

7. (a) Par récurrence.

(I) Pour $n = 0$: $\frac{1}{12}PD^0Q = \frac{1}{12}PI_3Q = PP^{-1} = I_3 = M^0$.

(H) Soit n un entier naturel. Supposons que $M^n = \frac{1}{12}PD^nQ$.

$$\begin{aligned}
 M^{n+1} &= M^n \cdot M \quad \text{par définition} \\
 &= \frac{1}{12}PD^nQ \cdot PDP^{-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &= \frac{1}{12}PD^n(12 I_3)D \left(\frac{1}{12}Q \right) \\
 &= \frac{1}{12}PD^nDQ \\
 &= \frac{1}{12}PD^{n+1}Q
 \end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $M^n = \frac{1}{12}PD^nQ$.

(b) Par un calcul direct, $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) Soit n un entier naturel.

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}PD^nQ \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}PD^n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Or D est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 10^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix}$.

$$\text{Alors } PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 10^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^n & -6^n & 10^n \\ 3 \times 10^n & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 3 \times 10^n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 10^n & -6^n & 10^n \\ 3 \times 10^n & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 3 \times 10^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 6 \times 10^n + 6 \times 6^n \\ 6 \times 10^n - 6 \times 6^n \\ 12 \times 10^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{6}{12} \cdot \begin{pmatrix} 10^n + 6^n \\ 10^n - 6^n \\ 2 \times 10^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^n \begin{pmatrix} 5^n + 3^n \\ 5^n - 3^n \\ 2 \times 5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, pour tout entier naturel } n, M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 5^n + 3^n \\ 5^n - 3^n \\ 2 \times 5^n \end{pmatrix}.$$

8. (a) Soit n un entier naturel.

$$\frac{1}{10} M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7x_n + y_n + 1 \\ 3x_n + 9y_n - 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Par récurrence sur n .

$$(I) \text{ Pour } n = 0 : \frac{1}{10^0} M^0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(H) \text{ Soit } n \text{ un entier naturel. Supposons que } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} M \cdot \left(\frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{10^{n+1}} M^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi par le principe de récurrence, pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Soit n un entier naturel.

D'après la question précédente, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Or $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Donc $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

D'après la question 7.(c), $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10^n} \times 2^{n-1} \begin{pmatrix} 5^n + 3^n \\ 5^n - 3^n \\ 2 \times 5^n \end{pmatrix}.$

Alors $x_n = \frac{2^{n-1}}{10^n} (5^n + 3^n) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{10}\right)^n (5^n + 3^n) = \frac{1}{2} \frac{5^n + 3^n}{5^n}.$

Finalement : pour tout entier naturel n , $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$

Exercice 2

Partie 1

1. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty.$ donc par produit et somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0.$ donc par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)e^{1-x} = 0.$

Finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 - 0 = 1.$

La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty.$

2. (a) Par l'expression de la dérivée d'un produit, pour tout réel x , $g'(x) = -1.e^{1-x} - x(-1)e^{1-x} = (x-1)e^{1-x}.$

Donc, pour tout réel x , $g'(x) = (x-1) e^{1-x}.$

(b) Puisque $e^{1-x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est le signe de $x-1$. Donc

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	1

3. (a) Par l'expression de la dérivée d'un produit, , pour tout réel x ,

$$g''(x) = e^{1-x} + (x-1)(-e^{1-x}) = (2-x)e^{1-x}$$

Ainsi, pour tout réel x , $g''(x) = (2-x) e^{1-x}.$

(b) Comme précédemment, le signe de $g''(x)$ est le signe de $2 - x$. Alors

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g''(x)$	$+$	0	$-$

Ainsi g est convexe sur $] - \infty; 2[$ et concave sur $]2; +\infty[$.

g'' s'annule et change de signe à l'abscisse 2. Donc g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 2.

4. (a) Une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 est :

$$y = g'(2)(x - 2) + g(2).$$

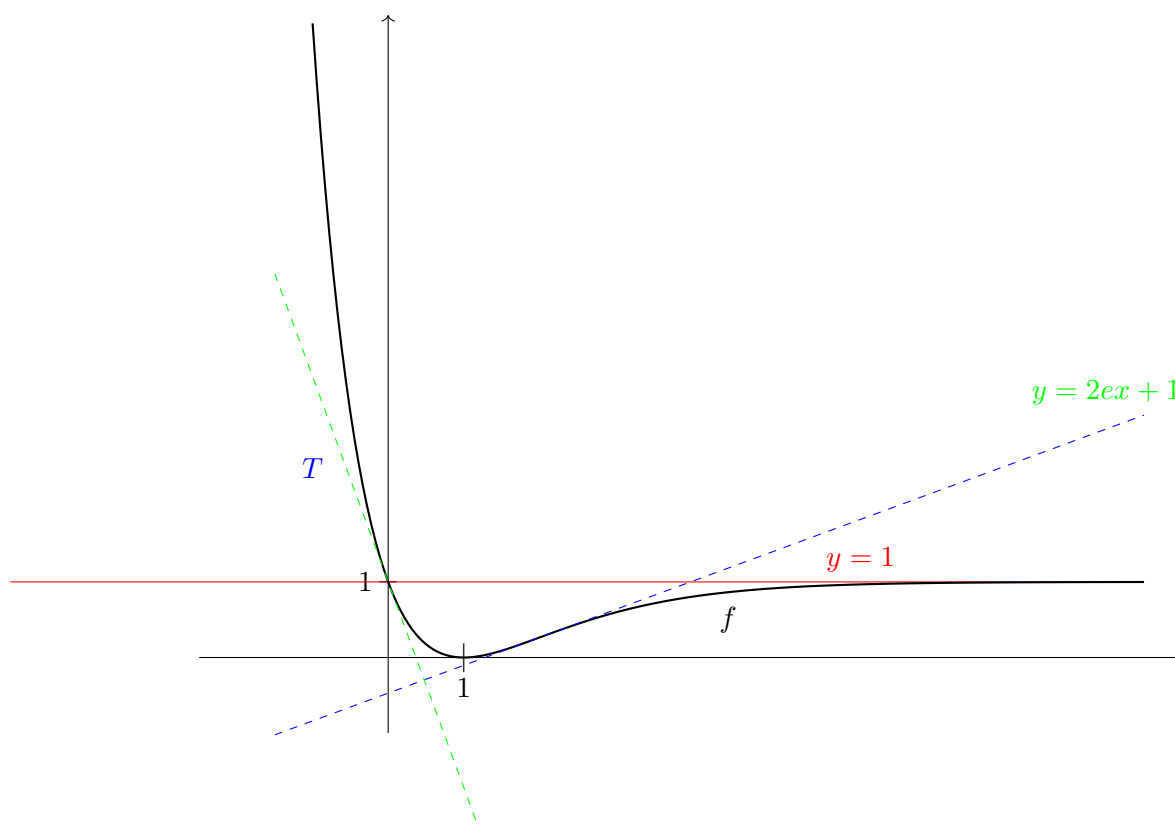
$$\text{Or } g'(2) = e^{-1} \text{ et } g(2) = 1 - 2e^{-1}.$$

$$\text{Donc la tangente } T \text{ a pour équation } y = \frac{1}{e}x + 1 - \frac{4}{e}.$$

(b) Sur $] - \infty; 2[$, g est convexe. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de (T) sur $] - \infty; 2[$.

Sur $]2; +\infty[$, g est concave. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessous de (T) sur $]2; +\infty[$.

5.



Partie 2

6. (a) Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ sur $]e; +\infty[$ est la fonction : $t \mapsto -\frac{1}{2t^2}$.

(b) Soit x un réel strictement supérieur à e .

On va réaliser une intégration par parties. Posons, pour t réel de l'intervalle $]e, +\infty[$, $u(t) = -\frac{1}{2t^2}$ et $v(t) = \ln(t) - 1$.

u et v sont dérivables sur $]e, +\infty[$ et pour t réel de l'intervalle $]e, +\infty[$, $u'(t) = \frac{1}{t^3}$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$.

Alors

$$\begin{aligned} \int_e^x \frac{\ln(t) - 1}{t^3} dt &= \int_e^x u'(t)v(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2t^2}(\ln(t) - 1) \right]_e^x - \int_e^x -\frac{1}{2t^3} dt \\ &= -\frac{1}{2x^2}(\ln(x) - 1) + 0 + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2t^2} \right]_e^x \\ &= \frac{1}{2x^2}(1 - \ln(x)) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^2} \right) \\ &= \frac{1}{2x^2} \left(1 - \ln(x) - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4e^2} \\ &= \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + \frac{1}{4e^2} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $]e, +\infty[$, $\int_e^x \frac{\ln(t) - 1}{t^3} dt = \frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + \frac{1}{4e^2}$.

(c) **Positivité** : f est positive sur $] -\infty; e[$.

Sur $]e; +\infty[$: $t \geq e$ donc $\ln(t) \geq 1$ donc $\ln(t) - 1 \geq 0$ donc $f(t) \geq 0$.

f est donc positive sur $\mathbb{R}$.

Continuité :

Sur $] -\infty; e[$: f est constante donc continue ;

Sur $]e; +\infty[$: f est un quotient à dénominateur non nul de fonctions continues donc f est continue.

f est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en e .

Intégration :

$$\int_{-\infty}^e f(t) dt = \int_{-\infty}^e 0 dt = 0 ;$$

Pour tout réel $x > e$,

$$\begin{aligned} \int_e^x f(t) dt &= 4e^2 \int_e^x \frac{\ln(t) - 1}{t^3} dt \\ &= 4e^2 \left(\frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + \frac{1}{4e^2} \right) \\ &= 4e^2 \left(\frac{1}{4x^2} - \frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{4e^2} \right). \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{2x^2} = 0$ par croissances comparées.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_e^x f(t) dt = 4e^2 \left(0 - 0 + \frac{1}{4e^2} \right) = 1.$$

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $0 + 1 = 1$.

Ainsi f est une densité de probabilité.

7. (a) Par définition, pour tout réel x , $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Si $x < e$, alors $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

Si $x \geq e$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^e 0 dt + \int_e^x f(t)dt \\ &= 0 + 4e^2 \left(\frac{1}{2x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + \frac{1}{4e^2} \right) \\ &= \frac{2e^2}{x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, pour tout réel } x, F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < e \\ 1 + \frac{2e^2}{x^2} \left(\frac{1}{2} - \ln(x) \right) & \text{si } x \geq e \end{cases}$$

$$(b) \diamond \mathbb{P}([X \leq e^2]) = F(e^2) = \frac{2e^2}{e^4} \left(\frac{1}{2} - \ln(e^2) \right) + 1 = \frac{2}{e^2} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + 1 = 1 - \frac{3}{e^2}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}([X \leq e^2]) = \frac{e^2 - 3}{e^2}.$$

$$\diamond \mathbb{P}([e^2 < X \leq e^3]) = F(e^3) - F(e^2).$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}([e^2 < X \leq e^3]) = \frac{2e^2}{e^6} \left(\frac{1}{2} - \ln(e^3) \right) + 1 - \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) = \frac{2}{e^4} \left(\frac{1}{2} - 3 \right) + \frac{3}{e^2}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}([e^2 < X \leq e^3]) = \frac{3e^2 - 5}{e^4}.$$

$$\diamond \text{ Par définition, } \mathbb{P}_{[X \geq e^2]}([X < e^3]) = \frac{\mathbb{P}([e^2 \leq X < e^3])}{\mathbb{P}([X \geq e^2])} = \frac{F(e^3) - F(e^2)}{1 - F(e^2)}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}_{[X \geq e^2]}([X < e^3]) = \frac{\frac{3e^2 - 5}{e^4}}{1 - (1 - \frac{3}{e^2})} = \frac{3e^2 - 5}{e^4} \cdot \frac{e^2}{3} = \frac{3e^2 - 5}{3e^2}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}_{[X \geq e^2]}([X < e^3]) = \frac{3e^2 - 5}{3e^2}.$$

$$8. (a) \text{ Pour tout réel } x \geq e, G'(x) = -\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x) - 1}{x^2}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout réel } x \geq e, G'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{x^2}.$$

(b) $\diamond$ X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge.

$$\diamond \int_{-\infty}^e tf(t) dt = 0.$$

$\diamond$ Soit x un réel strictement supérieur à e .

$$\begin{aligned} \int_e^x tf(t)dt &= 4e^2 \int_e^x \frac{\ln(t)-1}{t^2} dt \\ &= 4e^2 \int_e^x G'(t) dt \\ &= 4e^2 [G(t)]_e^x \\ &= 4e^2 \left[-\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln e}{e} \right] \\ &= 4e^2 \left[-\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{e} \right] \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) = 0$ par croissances comparées.

Donc l'intégrale $\int_e^{+\infty} tf(t)dt$ converge et vaut $4e^2 \left(-0 + \frac{1}{e} \right) = 4e$.

Ainsi X admet une espérance et $E(X) = 4e$.

9. (a) Pour tout réel $x \geq e^2$, $t^2 f(t) = 4e^2 \frac{\ln(t)-1}{t}$.

Or $t \geq e^2$. Donc $\ln(t) \geq 2$. Donc $\ln(t) - 1 \geq 1$. Donc $\frac{\ln(t)-1}{t} \geq \frac{1}{t}$.

Donc $t^2 f(t) \geq \frac{4e^2}{t}$.

(b) $\diamond$ X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt$ converge.

$\diamond$ Soit x tel que $x \geq e^2$.

$\int_{e^2}^x t^2 f(t)dt \geq \int_{e^2}^x \frac{4e^2}{t} dt$, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant.

Or $\int_{e^2}^x \frac{4e^2}{t} dt = 4e^2 [\ln(t)]_{e^2}^x = 4e^2(\ln(x) - 2)$.

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 2 = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{e^2}^x \frac{4e^2}{t} dt = +\infty$.

Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{e^2}^x t^2 f(t) dt = +\infty$.

Alors $\int_{e^2}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ diverge.

Ainsi X^2 n'admet pas d'espérance et X n'admet pas de variance.

10. (a) Pour tout réel x , $F_n(x) = \mathbb{P}([Z_n \leq x]) = \mathbb{P}([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x] \cap \dots \cap [X_n \leq x])$.
Les variables étant indépendantes, $F_n(x) = \mathbb{P}([X_1 \leq x]) \times \mathbb{P}([X_2 \leq x]) \times \dots \times \mathbb{P}([X_n \leq x])$.
Et, puisque les variables aléatoires suivent toutes la même loi que X ,
 $F_n(x) = F(x) \times F(x) \times \dots \times F(x) = (F(x))^n$.

Ainsi, pour tout réel x , $F_n(x) = (F(x))^n$.

- (b) Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{e}}Z_n \leq e^{\frac{x}{2}}\right]\right) &= \mathbb{P}\left([Z_n \leq \sqrt{e} \times e^{\frac{x}{2}}]\right) \\ &= F_n\left(\sqrt{e} \times e^{\frac{x}{2}}\right) \\ &= \left(\frac{2e^2}{(\sqrt{e} \times e^{\frac{x}{2}})^2}\right) \left(\frac{1}{2} - \ln(\sqrt{e} \times e^{\frac{x}{2}}) + 1\right)^n \\ &= \left(\frac{2e^2}{e \times e^x}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + 1\right)^n \\ &= \left(2e^{1-x} \left(-\frac{x}{2}\right) + 1\right)^n \\ &= (1 - xe^{1-x})^n \\ &= (g(x))^n \end{aligned}$$

Ainsi pour tout réel x supérieur ou égal à 1, $\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{e}}Z_n \leq e^{\frac{x}{2}}\right]\right) = (g(x))^n$.

- (c) Oui, cela était prévisible.

En effet $\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{e}}Z_n \leq e^{\frac{1}{2}}\right]\right) = \mathbb{P}([Z_n \leq \sqrt{e} \times \sqrt{e}]) = \mathbb{P}([Z_n \leq e]) = 0$ (on rappelle que $Z_n(\Omega) = [e; +\infty[)$).

Partie 3

11. (a) $\diamond h_n(1) = (g(1))^n = 0^n$. Donc $h_n(1) = 0$

$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = 1$.

- (b) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, $h'_n(x) = ng'(x)(g(x))^{n-1}$.
Or $n > 0$ et, d'après la question 2., $g'(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
Donc, pour tout réel $x \geq 1$, $h'_n(x) \geq 0$ et h_n est croissante sur $[1, +\infty[$.

- (c) Soit n un entier naturel non nul.

h_n est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et $h_n(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_n(x) = 1$.

Donc h_n réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[0, 1[$

et ainsi l'équation $h_n(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α_n et $\alpha_n \in [1, +\infty[$.

12. Pour tout entier naturel n non nul, α_n est l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de h_n et de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

On peut conjecturer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

13. (a) Rappelons que $h_n(\alpha_n) = \frac{1}{2}$. Donc $(g(\alpha_n))^n = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } h_{n+1}(\alpha_n) = (g(\alpha_n))^{n+1} = (g(\alpha_n))^n \times g(\alpha_n) = \frac{1}{2} \times g(\alpha_n) = \frac{1 - \alpha_n e^{1-\alpha_n}}{2}.$$

$$\text{Ainsi } h_{n+1}(\alpha_n) = \frac{1 - \alpha_n e^{1-\alpha_n}}{2}.$$

- (b) Or $\alpha_n \geq 1$. Donc $-\alpha_n e^{1-\alpha_n} \leq 0$.

$$\text{Donc } 1 - \alpha_n e^{1-\alpha_n} \leq 1. \text{ Donc } \frac{1 - \alpha_n e^{1-\alpha_n}}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } h_{n+1}(\alpha_n) \leq h_{n+1}(\alpha_{n+1}).$$

Et puisque la fonction h_{n+1} est strictement croissante, $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$.

14. Comme la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est croissante, alors $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite finie ou tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Partie 1

1. (a) R est la somme de n variables aléatoire de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $\frac{3}{10}$.

Donc R suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{3}{10}$.

$$R(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket \text{ et pour tout entier } k \text{ de } \llbracket 0; n \rrbracket, \mathbb{P}([R = k]) = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{n-k}.$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \mathbb{E}(R) &= n \times \frac{3}{10} \\ \mathbb{V}(R) &= n \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{E}(R) = \frac{3n}{10} \text{ et } \mathbb{V}(R) = \frac{21n}{100}.$$

2. (a) $\diamond \mathbb{P}([S = 0]) = \mathbb{P}([R + C = 0]) = \mathbb{P}([M = n]) = \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Ainsi $\mathbb{P}([S = 0]) = \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

$$\diamond \mathbb{P}([S = 1]) = \mathbb{P}([R + C = 1]) = \mathbb{P}([M = n - 1]) = \binom{n}{n-1} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4n}{5^n}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}([S = 1]) = \frac{4n}{5^n}$$

- (b) S est la variable aléatoire égale au nombre de foulards avec des motifs de roses ou à carreaux obtenus lors n tirages indépendants avec remise.

Or la probabilité d'obtenir un foulard avec des roses ou avec des motifs à carreaux est égale à $\frac{3}{10} + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$.

Donc S suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{4}{5}$.

(c) $\mathbb{E}(S) = n \times \frac{4}{5}$ et $\mathbb{V}(S) = n \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}$.

Donc $\mathbb{E}(S) = \frac{4n}{5}$ et $\mathbb{V}(S) = \frac{4n}{25}$

3. (a) Rappelons que $\mathbb{V}(R + C) = \mathbb{V}(R) + \mathbb{V}(C) + 2 \text{Cov}(R, C)$
Or $\mathbb{V}(R + C) = \mathbb{V}(S) = \frac{4n}{25}$ et $\mathbb{V}(R) = \frac{21n}{100}$ et $\mathbb{V}(C) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.
Donc $\frac{4n}{25} = \frac{21n}{100} + \frac{n}{4} + 2 \text{Cov}(R, C)$
donc $\text{Cov}(R, C) = \frac{1}{2} \left(\frac{4n}{25} - \frac{21n}{100} - \frac{n}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{30n}{100} \right)$.

Finalement : $\text{Cov}(R, C) = -\frac{3n}{20}$.

- (b) Puisque $\text{Cov}(R, C) \neq 0$, les variables R et C ne sont pas indépendantes.

(c) Par définition, $\rho(R, C) = \frac{\text{Cov}(R, C)}{\sqrt{\mathbb{V}(R) \times \mathbb{V}(C)}}$.

Donc $\rho(R, C) = \frac{-\frac{3n}{20}}{\sqrt{\frac{21n}{100} \times \frac{n}{4}}} = -\frac{3n}{20} \times \frac{20}{\sqrt{21n}} = -\frac{3}{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}$.

Ainsi $\rho(R, C) = -\sqrt{\frac{3}{7}}$.

4. (a) La fonction **Foulards** renvoie sous forme de matrice-ligne le nombre de foulards respectivement à motif de roses, à motifs à carreaux et à motif d'instruments de musiques lors de n tirages avec remise effectués dans la boîte.

(b)

```

n = int(input('nombre n de foulards tires dans la boite = ?'))
N = int(input('nombre total N d experiences = ?'))
r = np.zeros(N)
c = np.zeros(N)

ERC = 0

for k in range(N):
    [R,C,M]=Foulards(n)
    r[k] = R
    c[k] = C
    ERC = ERC + r[k]*c[k]

print('valeur empirique de Cov(R,C) : ', 1/N*ERC-np.mean(r)*np.mean(c))
print('valeur theorique de Cov(R,C) : ', -3*n/20)

```

Partie 2

5. (a) T est la variable aléatoire du nombre de tirage nécessaire pour l'obtention pour la première fois d'un foulard portant soit des carreaux soit des instruments de musique, soit des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$.

Donc T suit la loi géométrique de paramètre $\frac{7}{10}$.

(b) $E(T) = \frac{1}{\frac{7}{10}}$ et $V(T) = \frac{1 - \frac{7}{10}}{(\frac{7}{10})^2} = \frac{3}{10} \times \frac{10^2}{7^2}$. Donc $E(T) = \frac{10}{7}$ et $V(T) = \frac{30}{49}$

6. (a) Pour que l'expérience s'arrête, il faut tirer au moins deux foulards. Donc $N(\Omega) = [2; +\infty[$.

(b) $[N = 2] = [R_1 \cap \overline{R_2}] \cup [\overline{R_1} \cap R_2]$.

- (c) Par incompatibilité des événements, $P([N = 2]) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(\overline{R_1} \cap R_2)$.
Puis par indépendance des tirages :

$$P([N = 2]) = P(R_1) \times P(\overline{R_2}) + P(\overline{R_1}) \times P(R_2) = \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{50}.$$

Donc $P([N = 2]) = \frac{21}{50}$.

(d) $[N = 3] = [R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3}] \cup [\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3]$.

Puis par incompatibilité et indépendance :

$$P([N = 3]) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \frac{7}{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100} \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{10}\right). \text{ Ainsi } P([N = 3]) = \frac{21}{100}.$$

(e) $\forall k \geq 2, P([N = k]) = \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}$. Or $-1 < \frac{3}{10} < 1$ et $-1 < \frac{7}{10} < 1$.

Donc les séries géométriques $\sum_{k \geq 2} \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 2} \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}$ convergent.

Donc $\sum_{k \geq 2} P([N = k])$ converge et:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} P([N = k]) &= \frac{7}{10} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \frac{3}{10} \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} \\ &= \frac{7}{10} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{10}\right)^j + \frac{3}{10} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^j \\ &= \frac{7}{10} \left(\frac{1}{1 - \frac{3}{10}} - 1\right) + \frac{3}{10} \left(\frac{1}{1 - \frac{7}{10}} - 1\right) \\ &= \left(1 - \frac{7}{10}\right) + \left(1 - \frac{3}{10}\right) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([N = k]) = 1.$$

7. (a) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} (1-q)^2 S_n &= (1-2q+q^2) \sum_{k=1}^n kq^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^n kq^{k-1} - 2 \sum_{k=1}^n kq^k + \sum_{k=1}^n kq^{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)q^j - 2 \sum_{j=1}^n jq^j + \sum_{j=2}^{n+1} (j-1)q^j \\ &= \left(1 + 2q + \sum_{j=2}^{n-1} (j+1)q^j\right) - \left(2q + \sum_{j=2}^{n-1} 2jq^j + 2nq^n\right) + \left(\sum_{j=2}^{n-1} (j-1)q^j + (n-1)q^n + nq^{n+1}\right) \\ &= 1 + 2q - 2q - 2nq^n + (n-1)q^n + nq^{n+1} + \sum_{j=2}^{n-1} (j+1-2j+j-1)q^j \\ &= 1 - (n+1)q^n + nq^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n non-nul, $(1-q)^2 S_n = 1 - (n+1)q^n + nq^{n+1}$.

(b) Comme $q \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nq^n = 0$.

Or $(1-q)^2 S_n = 1 - nq^n - q^n + nqq^n$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-q)^2 S_n = 1 - 0 - 0 + 0 = 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{(1-q)^2}$.

$$\text{Ainsi la série } \sum_{k \geq 1} kq^{k-1} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

8. N admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 2} k\mathbb{P}(N = k)$ converge.

$$\text{Or, pour tout entier } k \geq 2, k\mathbb{P}([N = k]) = \frac{7}{10} k \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \frac{3}{10} k \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

Or $-1 < \frac{3}{10} < 1$ et $-1 < \frac{7}{10} < 1$. Donc les séries $\sum_{k \geq 2} k \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}$ et $\sum_{k \geq 2} k \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}$ convergent.

Donc par linéarité, $\sum_{k \geq 2} kP(N = k)$ converge. Ainsi N admet une espérance.

$$\begin{aligned} \text{Et } E(N) &= \frac{7}{10} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} + \frac{3}{10} \sum_{k=2}^{+\infty} k \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} \\ &= \frac{7}{10} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} - 1 \right) + \frac{3}{10} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{7}{10}\right)^{k-1} - 1 \right) \\ &= \frac{7}{10} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{3}{10}\right)^2} - 1 \right) + \frac{3}{10} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{7}{10}\right)^2} - 1 \right) \\ &= \frac{10}{7} - \frac{7}{10} + \frac{10}{3} - \frac{3}{10} \\ &= \frac{30 + 70 - 21}{21} \\ &= \frac{79}{21} \end{aligned}$$

Ainsi $E(N) = \frac{79}{21}$.

9. (a) $([T = 1] \cap [N = 2]) = \overline{R_1} \cap R_2$.

Par indépendance des tirages, $P([T = 1] \cap [N = 2]) = P(\overline{R_1}) \times P(R_2) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$.

Ainsi $P([T = 1] \cap [N = 2]) = \frac{21}{100}$.

- (b) Par ailleurs $P(T = 1) \times P(N = 2) = \frac{7}{10} \times \frac{21}{50} = \frac{147}{500}$.

Donc $P([T = 1] \cap [N = 2]) \neq P(T = 1) \times P(N = 2)$.

Alors les variables aléatoires T et N ne sont pas indépendantes.

Partie 3

10. La requête permettant d'obtenir ce tableau est :

```
SELECT ref, tissu, motif, quantite FROM foulards.
```

11. L'attribut **ref** peut servir de clé primaire, car il permet d'identifier chaque article de façon univoque.

12. Le prix du foulard référencé 26ECR a évolué et vaut maintenant 72 €. La requête pour modifier la table **foulards** est :

```
UPDATE foulards
SET prix = 72
WHERE ref = 26ECR.
```

13. La requête `SELECT * FROM foulards WHERE quantite >= 20 AND delai livraison < 35` permet d'afficher tous les enregistrements de la table pour lesquels la quantité est supérieure ou égale à 20 articles et le délai de livraison strictement inférieur à 35 jours.

RAPPORT D'ÉPREUVE

1 Remarques globales

1.1 Forme

Le sujet présente trois exercices permettant de couvrir le programme. La longueur des deux premiers exercices permettait aux candidats de traiter également le troisième. L'informatique était présente dans le sujet (langage Python et SQL), et s'articulait avec les mathématiques.

Par rapport aux années précédentes, il est à souligner une réelle amélioration dans le soin apporté en général au copie. Il reste quelques copies illisibles ou s'apparentant à un brouillon, mais elles sont rares. Rappelons qu'il est impératif de proposer au correcteur une copie propre et lisible. Toute partie non lisible ne pourra pas être corrigée.

Par contre la numérotation n'est pas toujours respectée. Dans un nombre non négligeable de copies, les questions se suivent sans aucune numérotation ou seulement la numérotation principale. Le correcteur perdra beaucoup de temps à repérer la question abordée et sera moins enclin à accorder le bénéfice du doute. Nous encourageons les futurs candidats à prendre, pendant les années de préparation, l'habitude de bien rappeler la numérotation des questions, de la respecter et aussi de séparer chaque question d'un trait ou d'un saut de plusieurs lignes.

On rappelle une nouvelle fois que les abréviations sont à proscrire, qu'elles soient assez limpides ou plus obscures: « CC, Mq, vp, Sq ». Elles n'ont pas leur place dans une copie de concours.

Il est inutile de recopier ou de paraphraser la question avant d'y répondre. Les candidats perdent du temps, et quelque fois, il est gênant de se rendre compte que rien ne permet de distinguer la partie « je paraphrase l'énoncé » de la partie « je construis mon raisonnement ». La plupart des copies sont bien présentées

Dans de nombreuses copies, les produits de matrices sont écrits avec des matrices « décalées ». Il n'est pas aisé de déterminer explicitement laquelle est le résultat, par exemple pour le calcul de PDP^{-1} on voit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 10 \\ 30 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Cette écriture peut tout à fait aider certains candidats à mener correctement leurs calculs, mais si une telle présentation peut tout à fait être utilisée au brouillon, elle n'a pas sa place sur une copie.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 5,58, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

1.2 Fond

Dans une très grande majorité des copies, une certaine connaissance des éléments de base du programme des classes préparatoire est à noter. Cependant des difficultés importantes dans les calculs mêmes les plus simples rendent impossible une résolution correcte. Très souvent, il apparaît que les différentes formes de raisonnements, les implications ne sont pas maîtrisées, en particulier les symboles $=$ et $\Leftrightarrow$ sont pour beaucoup identiques. Un raisonnement par récurrence n'est pas à mener à chaque fois que la question contient $\forall n \in \mathbb{N}$. En particulier si aucune relation de récurrence, c'est-à-dire de lien entre le rang n et le rang $n + 1$, n'est établie, il sera peu probable qu'un raisonnement pas récurrence permette de conclure. Enfin voici quelques éléments importants rencontrés au fil des copies :

- Trop de candidats commencent une question en recopiant la conclusion attendue, ne sachant plus si l'affirmation constituant la conclusion est une hypothèse ou un but.
Le fait de recopier la conclusion de la question surtout si elle apparaît dans le sujet ne peut pas constituer un raisonnement complet et abouti.
De même si un candidat pense aboutir au résultat correct donné ou pas par l'énoncé, en s'appuyant sur des calculs erronés, il sera pénalisé car il donne alors le sentiment de tromper le lecteur et donc le correcteur.
- Les priorités opératoires ne sont pas respectées. L'utilisation de parenthèses pour prioriser les additions sur les multiplications semble optionnelle pour certains candidats. De nombreux calculs, certes corrects dans leur construction mentale, sont ainsi faux à la lecture.
La multiplication est parfois distributive sur... la multiplication! Cette méprise indique une confusion entre l'addition et la multiplication certainement liée à un manque de soin dans l'écriture les croix symbolisant l'addition « $+$ » et la multiplication « $\times$ ».
- La rédaction des calculs de probabilités est souvent acrobatique, avec de beaucoup trop nombreuses confusions entre $\cup$ et $\cap$, entre $\times$ et $+$, entre « incompatibles » et « indépendants ».
Même dans les meilleures copies, l'obtention de probabilités négatives n'éveille pas la suspicion des candidats.
- Les questions Python sont peu et mal traitées
- La syntaxe SQL est ignorée par la majorité des candidats.
- Des calculs de dérivation ou de primitive simples et classiques sont souvent laborieux.

2 Remarques question par question

Exercice 1

Partie 1

1. Notons qu'en général cette question est plutôt bien réussie et la récurrence est bien rédigée.
Cependant certains n'apportent pas le soin nécessaire à la rédaction d'une première question et du premier raisonnement par récurrence du sujet. Ainsi les phrases d'introduction sont rédigées de façon expéditive, à la limite de la correction. La conclusion ne comporte pas toujours le « $\forall n \in \mathbb{N}$ » et est parfois expéditive.
Des candidats semblent confondre le fait qu'une proposition soit « héréditaire » avec le fait qu'elle soit « vraie ». L'hérédité est parfois commencée en écrivant que la proposition est vraie : « $\forall n$ fixé ».
Une réelle méconnaissance du raisonnement par récurrence est parfois manifeste par une hérédité « démontrée » sur a_1 et b_1 .
Quelques candidats confondent indice et exposant en pensant que $a_{n+1} = a_n \times a_1$.
Pour d'autres, l'égalité à prouver dans l'hérédité est $a_{n+1} + b_{n+1} = 2$.
2. (a) Beaucoup tentent, sans succès, une récurrence. Un grand nombre de candidats abandonne cette question, ne voyant pas qu'il suffit d'écrire $b_n = 1 - a_n$.
Quelques calculs alambiqués, mais corrects.
(b) Cette équation du premier degré pose problème pour un bon nombre de candidats traitant la question: beaucoup de calculs fantaisistes, avec des confusions entre soustraction et division, addition et multiplication, et des calculs fractionnaires élémentaires non maîtrisés.
(c) Cette question est plutôt bien traitée quand elle est abordée. Des candidats « devinent » plus qu'ils ne calculent la raison $\frac{3}{5}$, sans doute par un apprentissage un peu trop mécanique de la méthode pour les suites arithmético-géométriques.
Certains candidats semblent obtenir la raison en comparant a_0 et a_1 sans être capable d'une démonstration rigoureuse.
Il est à noter que cette question a fait l'objet de nombreuses résolutions s'apparentant à de l'arnaque: une telle démarche est détectée et sanctionnée.
(d) Plusieurs candidats n'ont pas vu le lien avec les questions précédentes et ont raisonné par récurrence (souvent juste).
D'autres ont appliqué directement une formule de cours sans réel lien avec ce qui précède.
3. (a) Cette question est peu traitée dans l'ensemble.
De nombreux candidats ont pensé à écrire $b_n = 1 - a_n$ mais aboutissent à une erreur de signe (oubli de parenthèses pour remplacer a_n).
Quelques candidats ont perdu beaucoup de temps en faisant à nouveau la méthode d'une suite arithmético-géométrique pour (b_n) .
(b) Cette question est plutôt bien traitée quand elle est abordée.
4. Il est rare que cette question soit abordée et, quand elle l'est, les propositions sont fausses: $b=b+1$, $b \geq s$, $s < 3/4$, ou encore while]0 , 3/4[

Partie 2

5. (a) Cette question est majoritairement réussie.
Quelques rares candidats ne savent absolument pas multiplier deux matrices.
- (b) Cette question est en général bien réussie. Cependant quelques candidats ne tiennent pas compte de la question précédente et montrent l'inversibilité avec le pivot de Gauss, ils perdent alors beaucoup de temps.
Trop de candidats donnent la bonne réponse pour P^{-1} mais oublient d'expliquer pourquoi P est inversible.
Malgré le classicisme de la question, des réponses surprenantes persistent, du type $P^{-1} = Q$ ou $P^{-1} = \frac{1}{12}I \dots$
6. (a) Cette question est en général bien comprise et bien traitée. Cependant de nombreux candidats oublient de préciser que les vecteurs sont non nuls ou le précisent maladroitement en parlant de « vecteur propre non nul », laissant penser qu'il pourrait en exister de nuls.
- (b) Certains candidats calculent MP et PD puis concluent en utilisant l'inversibilité de P .
Quelques candidats argumentent, souvent de façon maladroite, sur la diagonalisation de M .
Trop de candidats bluffent sur la fin du calcul pour aboutir « de force » à la matrice M .
7. (a) Rappelons à nouveau que la rédaction de tout raisonnement par récurrence doit être particulièrement soignée, aucune étape ne doit être négligée pas même la conclusion.
Initialiser par $I = I$ ne permet pas d'avancer réellement. Une égalité du type $M^0 = 1$ indique une mauvaise connaissance de la nature des objets manipulés.
La gestion du coefficient $\frac{1}{12}$ a posé problème à de nombreux candidats.
- (b) Cette question est en général bien traitée.
De rares candidats ne savent pas effectuer ce produit.
- (c) Parmi ceux qui abordent cette question, beaucoup établissent le lien avec les questions précédentes, mais aussi de nombreuses arnaques ont été relevées.
Quelques candidats pensent que M^n est la matrice des coefficients à la puissance n .
Dans de nombreuses copies 3×10^n vaut 30^n .
La caractère diagonal de la matrice D est trop rarement rappelé.
8. (a) De nombreux candidats tentent ici de faire une récurrence.
Le produit de M par une matrice colonne ne donne pas toujours une matrice colonne.
- (b) Cette question est en général bien traitée par les candidats qui l'ont abordée.
Quelques erreurs de commutativité de matrices sont à noter.
Quelques copies font référence à une suite géométrique de matrices.

Certains candidats ne comprennent pas la question et tentent de calculer le produit $\frac{1}{10^n} M^n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}$ anticipant la question suivante sans prouver l'égalité demandée.
- (c) Cette question est peu traitée.
Peu de candidats finissent cette question, avec souvent une arnaque sur la simplification finale.

Exercice 2

Partie 1

Des candidats confondent $1 - xe^{1-x}$ avec $(1 - x) \times e^{1-x}$ rendant fausse toute cette partie.

1. (a) Le calcul de limite entraîne de nombreuses rédactions impropres du type " $+\infty \times e^{+\infty}$ " ou un théorème de croissances comparées invoqué à tort.
(b) Si le calcul de limite est en général correct, l'équation de l'asymptote peut être surprenante: $y = +\infty$ ou $x = 2$ bien qu'annoncée comme horizontale.
Plusieurs candidats parlent d'asymptote « en 1 ».
2. (a) Dans cette question, un calcul de dérivée utilisant la formule de la dérivée du produit est attendu, mais de très nombreuses erreurs de calculs y sont faites: avec des candidats qui se contentent de dériver x et qui trouvent $g'(x) = -1 \times e^{-1}$!
La dérivée de uv est souvent $u'v'$, et celle de e^u est $e^u \dots$
(b) L'absence de cohérence entre variations et limites/valeurs des extremums locaux ne trouble aucunement les candidats.
3. (a) Les mêmes erreurs de calculs qu'en 2.(a) apparaissent à nouveau ici.
(b) L'abscisse du point d'inflexion, donnée dans l'énoncé, est souvent « forcée ».
L'incohérence entre certains tableaux de signe de g'' et la conclusion d'un point d'inflexion en 2 (donné dans l'énoncé) est parfois déconcertante.
4. (a) En général l'équation de la tangente en un point est bien connue, mais une plus grande attention est attendue de la part des candidats en adaptant cette expression à la fonction g et non à une fonction f ! Rappelons qu'une équation de droite commence « $y = \dots$ ».
(b) Cette question est en général peu traitée.
De très rares candidats pensent à utiliser la convexité. Quelques autres se lancent vainement dans le calcul et l'étude du signe de $g(x) - y \dots$
5. Cette question est extrêmement peu traitée, et plutôt mal lorsqu'elle l'est.
Rappelons que les questions de ce type demandant l'allure de fonctions sont à traiter et permettent à des candidats de récupérer facilement des points.
Certains candidats tracent des « courbes » qui ne sont même pas des tracés de fonctions: plusieurs images pour certaines abscisses.

Partie 2

6. (a) Des réponses assez fantaisistes à cette question. De très nombreux candidats mélangent primitive et dérivée: $t \mapsto \frac{-1}{4t^4}$ ou $t \mapsto \frac{-3}{t^4}$. D'autres encore reconnaissent la dérivée de $t \mapsto \ln(t^3)$. Certains candidats pensent qu'il y a un calcul d'intégrale sur $[e; +\infty[$ à faire dans cette question.
(b) La formule d'intégration par parties est en général bien connue, mais souvent mal appliquée à cause de parenthésages absents ou farfelus.
Une erreur de signe sur la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ induit un forçage pour obtenir la réponse écrite dans l'énoncé.
Pour certains, ces deux expressions sont égales $\frac{\ln(t) - 1}{t^3}$, $\ln(t) \times \frac{-1}{t^3}$ indiquant à nouveau un manque d'attention amenant à confondre addition et multiplication.

- (c) Cette question est très souvent abordée. La définition d'une densité de probabilité est en général bien connue.
Cependant, la justification de la positivité et de la continuité par morceaux est trop souvent automatique, factice ou lacunaire. Par exemple, le fait que $\ln t - 1$ est positif est très rarement clairement expliqué.
Certains candidats perdent leur temps à étudier la continuité en e , en oubliant par ailleurs de justifier la continuité sur les intervalles.
De même pour le calcul des intégrales et la justification de leur convergence, trop souvent expéditive et forcée pour trouver 1, même quand on a oublié le facteur $4e^2$!
Très peu de candidats s'aperçoivent que le théorème des croissances comparées doit être invoqué.
7. (a) La définition est connue mais les calculs sont trop confus.
Des candidats ne voient pas le lien avec la question 6.(b) et font à nouveau l'intégration par parties! Ils perdent alors beaucoup de temps!
- (b) Peu de candidats abordent cette question.
Pour ceux qui traitent la question, le cours est bien connu, le lien avec la fonction de répartition est fait en général, mais les calculs finaux sont rarement bien maîtrisés.
8. (a) De nombreux calculs sont erronés. La dérivée d'un quotient est trop souvent le quotient des dérivées.
- (b) Cette question est globalement peu traitée.
Beaucoup de candidats perdent à nouveau du temps dans la résolution de cette question en n'utilisant pas la question précédente et la primitive obtenue, ils ont donc à nouveau fait une intégration par parties.
9. (a) Cette question est très peu traitée, seuls les meilleurs candidats ont su manipuler correctement les inégalités.
- (b) Les quelques étudiants ayant vu le lien avec la question précédente n'ont pas fait attention que l'inégalité était pour t supérieur à e^2 et utilisent alors la minoration pour $\int_e^{+\infty} t^2 f(t) dt$.
10. (a) Cette question est peu traitée.
Beaucoup de confusions sont faites entre événements et probabilités
L'indépendance est rarement évoquée, ou bien pas au bon moment.
- (b) Cette question est très peu traitée. Seuls les meilleurs candidats ont abouti à l'égalité demandée.
Quasiment aucun candidat ne parvient à expliquer clairement l'égalité.
- (c) Cette question n'est quasiment pas traitée, souvent avec une réponse lacunaire « oui » .

Partie 3

11. (a) Les erreurs de la question 1 se retrouvent ici.
Étonnamment, certains candidats qui se sont trompés dans la question 1 trouvent ici les bonnes réponses.
- (b) Des confusions entre « la fonction $t \mapsto h_n(t)$ est croissante » avec « la suite (h_n) est croissante » (de nombreuses études de $h_{n+1} - h_n$) sont à déplorer.
Certains candidats souhaitent dériver la fonction h_n mais se trompent dans le calcul de la

dérivée en proposant $x \mapsto ng(x)^{n-1}$. Et l'étude de signe est forcée pour trouver « positif » puisque l'énoncé indique la croissance de h_n .

pour d'autres, comme g est croissante, la fonction $h : x \mapsto g(x)^n$ est croissante car la fonction puissance est croissante. Il faudrait alors préciser que $\forall x \geq 1, g(x) \geq 0$ car de manière générale la fonction puissance n n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour d'autres encore, c'est la positivité de h_n sur $[1, +\infty[$ qui impliquerait sa croissance sur cet intervalle.

- (c) Les candidats qui traitent cette question voient bien qu'il faut parler du théorème de la bijection, mais la rédaction est trop souvent approximative, expéditive ou lacunaire.

L'image de $[1, +\infty[$ par h_n est parfois $[0, 1]$ au lieu de $[0, 1[$, ou aussi $[1, +\infty[$.

12. Cette lecture graphique a très peu été traitée.

13. (a) Cette question est très peu traitée.

(b) Cette question est très peu traitée.

14. Cette question est très peu traitée.

Exercice 3

Partie 1

1. (a) Cette question est en général bien réussie. La plupart des candidats savent reconnaître une loi binomiale.

Cependant, la rédaction est trop souvent approximative. Le support est souvent faux ou non donné ou bien avec une notation incorrecte $([0, n], [0; \dots; n])$.

Les paramètres sont parfois corrects sans que l'expression de $\mathbb{P}([R = k])$ le soit. Pour de nombreux candidats les parenthèses dans l'expression $\left(\frac{3}{10}\right)^k$ semblent optionnelles.

Certains candidats, pourtant assez bons, ne traitent pas cette question ; quelques candidats trouvent une loi uniforme de paramètre $\frac{1}{3}$, ou une loi géométrique ...

- (b) Cette question est en général bien traitée quand la loi est reconnue, mais beaucoup de candidats ne pensent pas à finir le calcul de $\frac{3}{10} \times \frac{7}{10}$.

2. (a) Cette question est très peu réussie. Peu de candidats ont vu le lien avec la variable M . Les autres écrivent en général « $\mathbb{P}(S = 0) + \mathbb{P}(R = 0)$ » ou « $\mathbb{P}(S = 0) \times \mathbb{P}(R = 0)$ » par indépendance » et trouvent des résultats qui ne font pas apparaître n .

- (b) Le résultat étant donné dans l'énoncé, une justification précise et claire est attendue.

Le fait qu'une loi binomiale n'ait que deux paramètres n'est, semble-t-il, pas clair pour certains candidats.

Beaucoup de réponses du type « R et C suivent une loi binomiale donc S aussi ».

- (c) Les formules donnant l'espérance et de la variance d'une loi binomiale ne sont pas toujours connues.

3. (a) Très peu de candidats ont pensé à utiliser la formule $\mathbb{V}(R + C) = \mathbb{V}(R) + \mathbb{V}(C) + 2\text{Cov}(R, C)$. La plupart ont essayé d'utiliser $\text{Cov}(R, C) = \mathbb{E}(RC) - \mathbb{E}(R)\mathbb{E}(C)$ et ont ensuite répondu n'importe quoi pour $\mathbb{E}(RC)$.

- (b) Peu de réponses à cette question.

- (c) Cette question a été peu traitée. Quelques candidats connaissent l'expression du coefficient mais peu arrivent à finir le calcul.
- 4. (a) Beaucoup de réponses approximatives ou erronées, du type « le programme donne les probabilités de ... »
- (b) Cette question n'a quasiment jamais traitée.

Partie 2

- 5. (a) Pour certains candidats, T suit une loi de Poisson, ou une loi uniforme.
La justification de la loi géométrique est souvent imprécise.
- (b) Ceux qui reconnaissent la loi géométrique écrivent souvent les bonnes formules.
- 6. En général, à partir de la question 6, peu de candidats répondent aux questions et le plus souvent incorrectement.
 - (a) La plupart des réponses sont complètement fausses.
Beaucoup confondent les ensembles suivants: $\llbracket 2, n \rrbracket$ et $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$.
 - (b) L'événement $[N = 2]$ n'est pas compris ou est mal écrit; rappelons que ces notations n'ont pas de sens $R_1 + R_2$ ou $R_1 \times R_2$!
 - (c) Le calcul de probabilité est en conséquence faux. Lorsque l'événement est bien écrit, l'incompatibilité et l'indépendance sont rarement ou maladroitement évoquées.
 - (d) Comme précédemment, l'événement est mal étudié et son écriture mélange intersection, réunion somme et produit. Quelques candidats utilisent l'expression donnée dessous pour calculer $\mathbb{P}([N = 3])$.
 - (e) Cette question est peu traitée.
Lorsque le calcul est fait, les candidats « forcent » pour obtenir une somme de 1.
Très peu de candidats précisent reconnaître des séries géométriques avec des raisons $|q| < 1$.
- 7. (a) Cette question est très peu abordée, et faussement lorsqu'elle l'est.
- (b) La série géométrique dérivée n'est pas au programme. Il est attendu de prouver le résultat en se servant de la question précédente.
En effet, certains candidats connaissent la somme de la série géométrique dérivée et l'écrivent sur leur copie.
- 8. Cette question n'a été que très rarement abordée.
- 9. (a) Cette question a été peu abordée.
- (b) Cette question a été peu abordée.

Partie 3

La syntaxe et la logique SQL sont très peu maîtrisées par les candidats, qui pourraient pourtant glaner des points précieux avec un investissement d'apprentissage mesuré. Beaucoup « inventent » à partir de souvenirs vagues ou tentent des analogies avec le langage Python.

- 10. Peu de réponses correctes sont données à cette question simple.
- 11. Les candidats qui répondent à cette question, le font bien en général.
- 12. La syntaxe n'est pas maîtrisée.

13. Les candidats qui répondent le font bien en général.

Beaucoup de candidats se contentent de traduire l'instruction SELECT par le verbe « sélectionner » , tandis que c'est le verbe « afficher » qui était attendu.