

**CONCOURS
ECRICOME**

**PRÉPAS
ECG/ECT**

ACCESSIBLE AUX CPGE ECG
OU ECT

2026

ANNALES

Mathématiques Appliquées

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

VOIE ÉCONOMIQUE ET
COMMERCIALE
GÉNÉRALE

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE	PAGE 3
CORRIGÉ	PAGE 4
RAPPORT D'ÉPREUVE	PAGE 19

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

■ SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

■ ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

■ ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. D'après l'énoncé, X est une variable aléatoire prenant des valeurs dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, choisies avec équiprobabilité. Ainsi, X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

2. D'après l'énoncé, pour tout entier j compris entre 1 et n , la loi conditionnelle de Y sachant $[X = j]$ est la loi uniforme sur $\llbracket 1, j \rrbracket$. Ainsi, pour tout $(j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

- Si $k > j$,

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \mathbb{P}(X = j)P_{[X=j]}(Y = k) = 0.$$

- Si $k \leq j$,

$$\mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \mathbb{P}(X = j)P_{[X=j]}(Y = k) = \frac{1}{n} \frac{1}{j}.$$

$$\text{Ainsi : } \forall (j, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \begin{cases} \frac{1}{nj} & \text{si } k \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Remarquons que $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket^2$, donc $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Or, } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = 1, \text{ autrement dit : } \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = n.$$

4. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à X , $\{[X = j] : j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = k]) = \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}$.

5. (a)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \frac{k}{j} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j k \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1). \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1)$.

(b) L'ensemble $Y(\Omega)$ est fini, donc la variable aléatoire Y admet une espérance.

De plus, d'après les deux questions précédentes,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k \sum_{j=k}^n \frac{1}{nj} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{k}{j} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1 \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Finalement, $\mathbb{E}(Y) = \frac{n+3}{4}$.

6. (a) Les variables aléatoires X et Y prenant un nombre fini de valeurs, XY prend également un nombre fini de valeurs et XY admet une espérance. De plus, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n jk \mathbb{P}([X=j] \cap [Y=k]) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j jk \frac{1}{nj} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1).$$

- (b) En poursuivant le calcul de la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n j(j+1) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (j^2 + j) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n+1}{12} (2n+4) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6}.\end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } \mathbb{E}(XY) = \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

- (c) D'après la formule de Huygens,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2} \times \frac{n+3}{4} \\ &= \frac{n+1}{24} (4(n+2) - 3(n+3)) \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{24} \\ &= \frac{n^2-1}{24}.\end{aligned}$$

$$\text{Donc la covariance du couple } (X, Y) \text{ est égale à } \frac{n^2-1}{24}.$$

7. Par hypothèse, $n \geq 2$ donc $\text{Cov}(X, Y) = \frac{n^2 - 1}{24} \neq 0$,

donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

8. (a)

```
import numpy.random as rd

def simulXY(n):
    x = rd.randint(1, n+1)
    y = rd.randint(1, x+1)
    return x, y
```

(b) $M[0, 1]$ correspond à la covariance empirique de la série statistique (x, y) , et $M[0, 0]$ et $M[1, 1]$ correspondent respectivement aux variances empiriques de x et de y .

Ainsi, le résultat renvoyé correspond au coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (x, y) .

(c) On sait que :

- la droite d'ajustement affine doit être une droite (ce qui exclut le tracé n° 1),
- la droite d'ajustement affine passe par le point moyen du nuage (ce qui exclut le tracé n° 3),
- la droite d'ajustement affine doit être croissante lorsque la covariance est positive, ce qui est le cas du couple (X, Y) (ce qui exclut le tracé n° 4).

Ainsi, par élimination, le tracé correct est le tracé n° 2.

9. (a) L'événement A_n est égal à : $A_n = [X = Y]$.

(b) D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X = j] : j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(X = Y) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [X = Y]) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{P}([X = j] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{nj}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

- (c) Soit j un entier naturel non nul. La fonction $\ln$ est dérivable sur $[j, j+1]$, et pour tout $t \in [j, j+1]$,

$$\frac{1}{j+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{j}.$$

Ainsi, par croissance de l'intégration sur l'intervalle $[j, j+1]$

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{j+1} dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_j^{j+1} \frac{1}{j} dt$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}.$$

- (d) $\diamond$ D'après la question précédente, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\ln(j+1) - \ln(j) \leq \frac{1}{j}$.

En sommant, $\sum_{j=1}^n (\ln(j+1) - \ln(j)) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$.

Or, en reconnaissant une somme télescopique, $\sum_{j=1}^n (\ln(j+1) - \ln(j)) = \sum_{j=1}^n \ln(j+1) -$

$$\sum_{j=1}^n \ln(j) = \ln(n+1).$$

Donc $\ln(n+1) \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ et en divisant par n , $\frac{\ln(n+1)}{n} \leq \mathcal{P}(A_n)$.

- $\diamond$ D'après la question précédente, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{j+1} \leq \ln(j+1) - \ln(j)$.

En sommant de 1 à $n-1$, $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j+1} \leq \sum_{j=1}^{n-1} (\ln(j+1) - \ln(j))$.

c'est-à-dire, en reconnaissant encore une somme télescopique, $\sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \leq \ln(n)$.

Or $\mathcal{P}(A_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \frac{1}{j}$. D'où $\mathcal{P}(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$.

$$\text{Finalement, } \frac{\ln(n+1)}{n} \leq \mathcal{P}(A_n) \leq \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}.$$

- (e) $\diamond$ En divisant par $\frac{\ln(n)}{n}$ dans l'encadrement précédent,

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \times \frac{n}{\ln(n)} \leq \frac{\mathcal{P}(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq \left(\frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} \right) \frac{n}{\ln(n)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{\mathcal{P}(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

$$\diamond \text{ Or, } \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)}.$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1.$$

$$\diamond \text{ D'autre part, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right) = 1.$$

$$\text{Ainsi, par encadrement, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\frac{\ln(n)}{n}} = 1, \text{ autrement dit, } \mathbb{P}(A_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

10. (a)

```
SELECT COUNT(*)
FROM adherent
WHERE id_2025 = id_2026
```

(b) Cette requête renvoie

une table associant pour chaque numéro d'adhérent, le nom de la compagnie que cet adhérent a choisi en 2026

(c)

```
SELECT compagnie, AVG(note)
FROM avis
GROUP BY compagnie
```

(d)

```
SELECT compagnie
FROM moyenne
ORDER BY note DESC
```

EXERCICE 2

Partie I

1. La fonction f est définie en tout point x tel que $\frac{1}{1-x} > 0$, c'est-à-dire tel que $1-x > 0$, c'est-à-dire tel que $x < 1$.

Ainsi, f est définie sur $] -\infty, 1[$.

2. Pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $f(x) = -\ln(1-x)$.

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln(X) = -\infty$$

$$\text{D'autre part, } \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\ln(h) = +\infty.$$

Finalement, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $] -\infty, 1[$ comme composée de fonctions usuelles dérivables et, pour tout réel $x < 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}.$$

En particulier, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in] -\infty, 1[$.

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $] -\infty, 1[$.

4. (a) Rappelons que $\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$.
En posant $h = -x$ qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= -\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\left((-x) - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

- (b) On en déduit que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$.

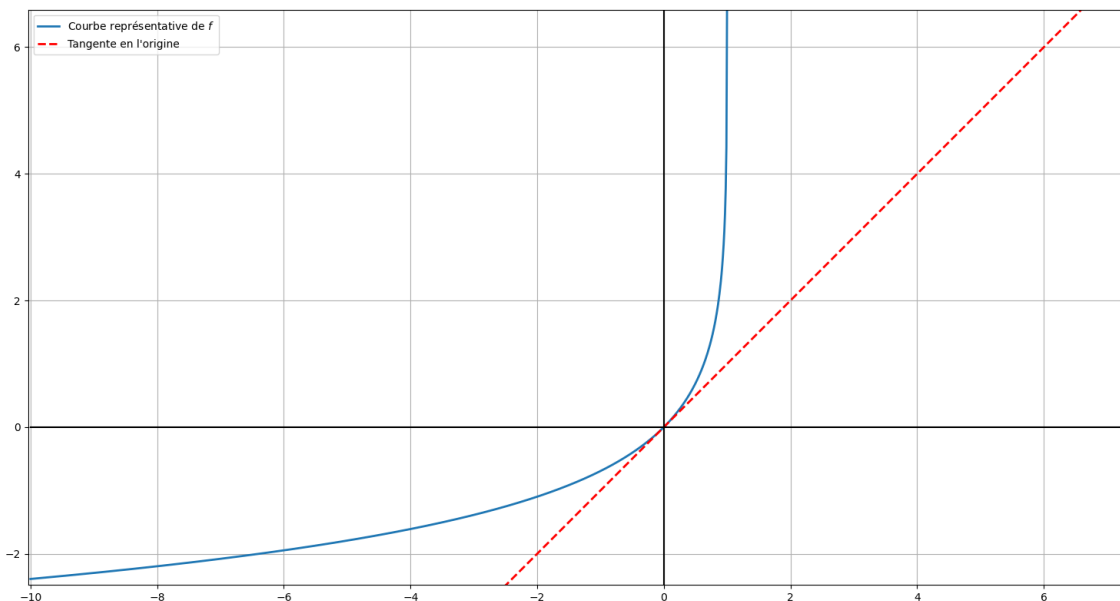
De plus, on a

$$f(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

donc $f(x) - x$ est positif au voisinage de 0.

Ainsi, la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0.

5.



Partie II

6. (a) D'après le cours, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge comme série de Riemann d'exposant $1 \leq 1$.

(b) Pour tout entier n strictement positif,

$$S_{n+1}(1) - S_n(1) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geq 0,$$

Donc la suite $(S_n(1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

(c) D'après le théorème de la limite monotone, une suite croissante et divergente tend vers $+\infty$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = +\infty$.

7. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout entier k strictement positif, $0 \leq \left| \frac{x^k}{k} \right| \leq |x|^k$, or la série géométrique

$\sum_{k \geq 1} |x|^k$ converge, donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge absolument.

8. (a) $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En effet, pour tout entier n strictement positif,

$$\begin{aligned} S_{2n+2}(-1) - S_{2n}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} \\ &= -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

car $2n+2 \geq 2n+1$ donc $\frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{2n+1}$.

$(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. En effet, pour tout entier n strictement positif,

$$\begin{aligned} S_{2n+3}(-1) - S_{2n+1}(-1) &= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} \\ &= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $2n+3 \geq 2n+2$ donc $\frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+2}$.

$(S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0. En effet, pour tout entier n strictement positif,

$$S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{1}{2n+1}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1}(-1) - S_{2n}(-1)) = 0$.

Finalement, les suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

- (b) D'après la question précédente que les suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes et qu'elles possèdent la même limite, puis que la suite $(S_n(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.
- (c) Les suites $(S_{2n}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant adjacentes, de limite $-\ln(2)$ et respectivement décroissante et croissante, pour tout entier n strictement positif,

$$S_{2n+1}(-1) \leq -\ln(2) \leq S_{2n}(-1).$$

Ainsi, $S_{2n}(-1) + \ln(2) \geq 0$, et d'autre part, $\ln(2) \leq -S_{2n+1}(-1)$, donc :

$$0 \leq S_{2n}(-1) + \ln(2) \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1).$$

Autrement dit, $|\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leq S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1).$

- (d) Soit p un entier strictement positif. En procédant comme à la question précédente, on a $\ln(2) + S_{2p+1}(-1) \leq 0$ et $-\ln(2) \leq S_{2p}(-1)$, donc :

$$\begin{aligned} |\ln(2) + S_{2p+1}(-1)| &= -\ln(2) - S_{2p+1}(-1) \\ &\leq S_{2p}(-1) - S_{2p+1}(-1). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$:

- Si n est pair, il existe $p \geq 1$ tel que $n = 2p$ et alors, d'après la question précédente,

$$|\ln(2) + S_n(-1)| \leq S_{2p}(-1) - S_{2p+1}(-1) = \frac{1}{2p+1} \leq \frac{1}{2p} = \frac{1}{n}.$$

- Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p+1$ et alors, d'après l'inégalité que l'on vient de montrer,

$$|\ln(2) + S_n(-1)| \leq S_{2p}(-1) - S_{2p+1}(-1) = \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{n}.$$

Enfin, pour $n = 1$ car $|\ln(2) + S_1(-1)| = |\ln 2 - 1| \leq 1$.

Finalement, pour tout entier n strictement positif, $|\ln(2) + S_n(-1)| \leq \frac{1}{n}$.

9. (a) Puisque $x > 1$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{k} = +\infty$.

Son terme général ne convergeant pas vers 0, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ diverge.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1}(x) - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \geq 0$ donc la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente, ainsi d'après le théorème de la limite monotone, $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Partie III

10. (a) Comme $-1 < a < 1$, donc $\forall t \in [0, a]$, $1 - t > 0$.

$$\text{Ainsi, } \int_0^a \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln|1-t| \right]_0^a = \left[-\ln(1-t) \right]_0^a = f(a).$$

$$\text{D'autre part, } \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt = \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^a = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}.$$

$$\text{Donc } \int_0^a \frac{1}{1-t} dt = f(a) \quad \text{et} \quad \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{a}{1-a}.$$

(b)

$$\begin{aligned} R_1(a) &= \int_0^a \frac{a-t}{(1-t)^2} dt \\ &= \int_0^a \frac{a-1+1-t}{(1-t)^2} dt \\ &= (a-1) \int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt + \int_0^a \frac{1}{1-t} dt \\ &= (a-1) \frac{a}{1-a} + f(a) \\ &= -a + f(a) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } f(a) = a + R_1(a).$$

11. Pour tout $t \in [0, a]$, on pose $u(t) = -\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1}$ (de sorte que $u'(t) = (a-t)^n$) et $v(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$ (donc $v'(t) = \frac{n+1}{(1-t)^{n+2}}$). Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, a]$, donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} R_n(a) &= \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1-t)^{n+1}} \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{n+1} \frac{n+1}{(1-t)^{n+2}} dt \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1} + \int_0^a \frac{(a-t)^{n+1}}{(1-t)^{n+2}} dt. \end{aligned}$$

$$\text{Autrement dit, } R_n(a) = \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a).$$

12. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

(I) Pour $n = 1$, on a, d'après la question 10b),

$$f(a) = a + R_1(a) = \sum_{k=1}^1 \frac{a^k}{k} + R_1(a) = S_1(a) + R_1(a).$$

(H) Soit n un entier strictement positif. On suppose $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$.

Alors, d'après la question précédente,

$$f(a) = S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a) = S_{n+1}(a) + R_{n+1}(a).$$

Conclusion. Par le principe de récurrence, pour tout entier n strictement positif, $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$.

13. (a) Remarquons que pour tout t de $[0, a]$, $\frac{a-t}{1-t} = \frac{a-1}{1-t} + 1$.

Or $a-1 < 0$. Donc $\varphi : t \mapsto \frac{a-t}{1-t}$ est décroissance sur $[0, a]$.

Or $\varphi(0) = a$ et $\varphi(a) = 0$.

Finalement $\forall t \in [0, a]$, $0 \leq \frac{a-t}{1-t} \leq a$.

- (b) Pour tout $t \in [0, a]$, $a-t \geq 0$ et $1-t \geq 0$ donc $\frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \geq 0$.

D'autre part, pour tout $t \in [0, a]$, en utilisant le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned} \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} &= \frac{1}{1-t} \left(\frac{a-t}{1-t} \right)^n \\ &\leq \frac{1}{1-t} a^n \\ &\leq \frac{a^n}{1-a}, \end{aligned}$$

car $t \leq a$, donc $1-a \leq 1-t$, donc par décroissance de l'inverse, $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-a}$.

Finalement, pour tout $t \in [0, a]$, $0 \leq \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \leq \frac{a^n}{1-a}$

d'où, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq R_n(a) \leq \int_0^a \frac{a^n}{1-a} dt,$$

c'est-à-dire $0 \leq R_n(a) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a}$.

- (c) D'après l'énoncé, $a \in [0, 1[$, donc $\left(\frac{a^{n+1}}{1-a} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique qui converge vers 0.

Ainsi, par encadrement et d'après le résultat de la question précédente, la suite $(R_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Or, d'après la question 12, $f(a) = S_n(a) + R_n(a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$.

Ainsi, par passage à la limite, $f(a) = S(a)$.

14. (a) Soit n un entier naturel non nul.

D'après la question 13b avec $a = \frac{1}{2}$: $0 \leq R_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.

Autrement dit, puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) = S_n\left(\frac{1}{2}\right) + R_n\left(\frac{1}{2}\right)$ d'après la question 12 :

$$0 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) - S_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Or par définition $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \ln(2)$, et $S_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k}$.

Ainsi, $\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k2^k} \right| \leq \frac{1}{2^n}$.

- (b) Par le calcul des valeurs successives de $S_n\left(\frac{1}{2}\right)$ jusqu'à ce que $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$.

```
def Val(eps):
    somme = 0
    n = 0
    while 1 / (2 ** n) > eps:
        n += 1
        somme += 1 / (n * 2 ** n)
    return somme
```

- (c) La suite $\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs. Il s'agit donc d'une suite croissante et convergente.

La suite $\left(S_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc représentée par des cercles sur la figure .

La suite $\left(-S_n(-1)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite dont les suites extraites de rangs pairs et impairs sont adjacentes.

La suite $\left(-S_n(-1)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc représentée par des croix sur la figure .

EXERCICE 3

Partie I

- En sommant les deux premières lignes de $\mathcal{C}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) + y'(t) = 0$, c'est-à-dire $s'(t) = 0$.
- La fonction s est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Or $s(0) = x(0) + y(0) = 2$.
Donc, pour tout réel t , $x(t) + y(t) = 2$, c'est-à-dire $y(t) = 2 - x(t)$.
- D'après les questions précédentes, si x et y sont solutions de $(\mathcal{C})$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x'(t) = 2$, donc il existe un réel λ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = 2t + \lambda$. De plus, $x(0) = 1$ donc $\lambda = 1$, ainsi $x(t) = 2t + 1$.
D'autre part, $y(t) = 2 - x(t)$, donc $y(t) = 1 - 2t$.
Réciproquement, on vérifie que les fonctions x et y définies pour tout t réel par $x(t) = 2t + 1$ et $y(t) = 1 - 2t$ vérifient bien $(\mathcal{C})$: ce sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ car polynomiales et, pour tout réel t , $x'(t) = 2 = x(t) + y(t)$, $y'(t) = -2 = -x(t) - y(t)$, $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$.
Finalement les solutions du problème $(\mathcal{C})$ sont les fonctions $x : t \mapsto 2t + 1$ et $y : t \mapsto 1 - 2t$.

Partie II

- La matrice P est inversible car son déterminant est égal à $1 \neq 0$. On vérifie que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $PB = BP = I_2$.
Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit λ un réel.

λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, si et

seulement si $(1-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = 0$.

si et seulement si $\lambda^2 = 0$, si et seulement si $\lambda = 0$.

Ainsi, l'unique valeur propre de A est 0.

6. On vérifie par l'absurde que A n'est pas diagonalisable. Supposons A diagonalisable. Alors, d'après la question précédente, il existe une matrice inversible Q telle que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = 0_2$, donc $A = 0_2$, ce qui contredit la définition de A .

La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

7. Notons $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs étant les colonnes de la matrice inversible P , ils forment une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et P est la matrice de passage de la base canonique à la base (X_1, X_2) .

Alors

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = X_1$$

donc l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A est représenté par J dans la base (X_1, X_2) .

Ainsi, par formule de changement de base, $J = P^{-1}AP$.

8. Les états d'équilibre de ce système différentiel sont ses solutions constantes.

Soient C et K deux réels et x, y deux solutions du système $(\mathcal{S})$ constantes égales à C et K respectivement.

Alors $x' = y' = 0$ donc le système se réécrit $C + K = 0$, c'est-à-dire $X(t) = \begin{pmatrix} C \\ -C \end{pmatrix}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Les états d'équilibre du système $(\mathcal{S})$ sont donc les fonctions x et y telles que X appartient à $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

9. Soient x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions x et y sont solutions de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, pour tout réel t , $X'(t) = AX(t)$.

Or $J = P^{-1}AP$, donc $A = PJP^{-1}$, et pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff X'(t) = PJP^{-1}X(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = JP^{-1}X(t) \\ &\iff Y'(t) = JY(t), \end{aligned}$$

où par linéarité de la dérivation, $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.

Finalement, x et y sont solutions de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, pour tout réel t , $Y'(t) = JY(t)$.

10. Pour toutes fonctions dérivables u et v sur $\mathbb{R}$ et tout réel t ,

$$Y'(t) = JY(t) \iff \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = 0 \end{cases}$$

Deux fonctions u et v sont donc solutions du système différentiel $Y'(t) = JY(t)$ si et seulement s'il existe deux réels c et λ tels que, pour tout réel t ,

$$\begin{cases} v(t) = c \\ u(t) = ct + \lambda \end{cases}$$

Les solutions du système $Y'(t) = JY(t)$ sont donc les fonctions de la forme $u : t \mapsto ct + \lambda$, $v : t \mapsto c$, où $(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

11. Soient x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

x et y sont solutions de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $P^{-1}X$ est solution de $Y' = JY$,

si et seulement si $\exists (c, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} ct + \lambda \\ c \end{pmatrix}$

si et seulement si $\exists (c, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} ct + \lambda \\ c \end{pmatrix}$

si et seulement si $\exists (c, \lambda) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} ct + \lambda \\ c \end{pmatrix}$

si et seulement si $\exists (c, \lambda) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct + \lambda \\ c(1-t) - \lambda \end{pmatrix}$

Ainsi, les solutions de $(\mathcal{S})$ sont donc les fonctions de la forme $x : t \mapsto ct + \lambda$, $y : t \mapsto c(1-t) - \lambda$, où $(c, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

Partie III

12.

```
import numpy as np

def Nil(M):
    n, _ = M.shape
    Mp = np.eye(n)
    for p in range(1, n + 1):
        Mp = np.dot(Mp, M)
        if (Mp == np.zeros(n,n)).all():
            return p
    return 0
```

13. Par hypothèse, $N^p = 0_n$, donc x^p est un polynôme annulateur de N .

Ainsi, les valeurs propres de N sont à chercher parmi les racines de x^p , autrement dit 0 est la seule valeur propre possible de N .

De plus, supposons que 0 n'est pas valeur propre de N ; alors N est inversible, donc N^p est inversible, ce qui contredit $N^p = 0_n$.

Finalement, l'unique valeur propre de N est 0.

14. Supposons N diagonalisable. Alors, d'après la question précédente, il existe une matrice inversible Q telle que $A = QDQ^{-1}$ avec $D = 0_2$, donc $N = 0_2$, ce qui contredit la définition de N .

La matrice N n'est donc pas diagonalisable.

15. Par linéarité de la dérivation, pour tout réel t , $X'(t) = B'(t)X_0$, et

$$\begin{aligned} B'(t) &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{kt^{k-1}}{k!} N^k \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel t , $X'(t) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0$.

16. En poursuivant le calcul de la question précédente, et en utilisant que $N^p = 0_n$,

$$\begin{aligned} \text{pour tout réel } t, X'(t) &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0 \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} N^k X_0 \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^{k+1} X_0 \\ &= N \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k}{k!} N^k \right) X_0 \\ &= NB(t)X_0 \\ &= NX(t). \end{aligned}$$

De plus, puisque $0^k = 1$ si et seulement si $k = 0$ et $0^k = 0$ sinon :

$$X(0) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{0^k}{k!} N^k X_0 = N^0 X_0 = X_0.$$

Ainsi, $X(t)$ est la solution du système $(\mathcal{E})$ telle que $X(0) = X_0$.

- 17.
- ```
def B(N, t):
 if Nil(N) == 0:
 return "N n'est pas nilpotente"
 else:
 T = np.eye(len(N))
 S = T
 for k in range(1, Nil(N)):
 T = t / k * np.dot(T, N)
 S = S + T
 return S
```

# RAPPORT DÉPREUVE

## 1 Remarques globales

### 1.1 Forme

Le soin apporté à une copie reste très inégal d'une copie à l'autre. Rappelons que les parties illisibles ne sont pas lues. Dans certaines copies, les chiffres 1 et 2 ou 1 et  $k$  ne sont pas discernables, le doute est alors rarement en faveur du candidat.

Les ratures sont à proscrire. Il est également attendu que les résultats soient mis en évidence, il peuvent être encadré à main levée si le tracé est propre et rectiligne, sinon l'usage d'une règle est indispensable.

La numérotation des questions doit être respectée. Si un candidat souhaite interrompre sa résolution d'exercice pour en entamer un autre, il lui est alors conseillé de commencer une nouvelle feuille double pour commencer ce nouvel exercice. IL pourra alors sans gêne pour le correcteur revenir au premier exercice quand il le désire.

Une orthographe correcte est attendue également surtout sur les mots indiqués dans l'énoncé. Ainsi le mot «compagnie» a trop souvent été orthographié «company». Ce manque de soin et de d'attention ne peut qu'être défavorable au candidat même si l'orthographe n'est pas elle-même évaluée. Que penser de l'aptitude d'un candidat à appliquer des théorèmes parfois assez compliqués quand il n'arrive pas à recopier un mot de l'énoncé?

Un emploi abusif des abréviations, à proscrire dans une copie même quand elles sont à peu près compréhensibles.

### 1.2 Fond

De manière générale, le cours est bien connu, une certaine aisance en Python et en SQL est à noter. Cependant trop de candidats se contentent d'une argumentation creuse : «par théorème», mais lequel ? ; «d'après le cours»... et souvent, la réponse est fausse donc il est peu probable que cela provienne du cours ; «par définition», et c e m ê m e q u a n d i l n e s ' a g i t p a s d e l a d é f i n i t i o n d ' u n e n o t i o n m a i s d ' u n e p r o p r i é t é.

Beaucoup de candidats ne répondent pas aux questions posées : au lieu de donner la limite de la fonction ils donnent la limite de « $\ln(X)$ », au lieu de donner la nature de la série, ils la nomment «harmonique» ou se contentent de dire que la série est une série de Riemann avec  $\alpha = 1$  sans dire qu'elle est divergente.

## 2 Remarques question par question

### Exercice 1

1. Cette question est en général très bien traitée, de nombreux étudiants reconnaissent correctement la loi uniforme et les formules de l'espérance et de la variance sont connues.

Il est cependant à noter que certains donnent un paramètre entier à une loi uniforme et non l'intervalle, d'autres ne distinguent pas  $[1, n]$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Plusieurs candidats n'ont pas donné l'espérance et la variance. Quelle en est la raison? La question n'a pas été lue jusqu'au bout (on ne peut conseiller que de lire attentivement les questions) ou méconnaissance du cours (il est absolument indispensable pour aborder un exercice de mathématique de connaître le cours).

De nombreux candidats donnent les probabilités alors que ce n'est pas demandé.

2. Cette question est en général bien traitée.

La formule des probabilités composée est rarement donnée, et la justification de  $\mathbb{P}_{X=j}(Y = k) = \frac{1}{j}$  si  $k \leq j$  est généralement passée sous silence.

3. Rares sont les candidats faisant référence à la loi de  $(X, Y)$  pour ce calcul.

Beaucoup de calculs de sommes directement avec bonne gestion des indices.

Quelques bonnes initiatives mais dans la majorité des cas, la manipulation de la somme double a posé problème.

Trop souvent la somme  $\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}$  dépend de  $k$  ou de  $j$ , par exemple  $\sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} = \frac{1}{nj}$ .

4. Les candidats se sont souvent arrêtés à la formule des probabilités totales seulement.

Plusieurs candidats donnent une somme dont l'indice est  $k$ .

5. (a) Cette question fut moyennement abordée.

Les calculs des sommes doubles avec l'interversion des indices sont plutôt bien effectués, pour ceux qui abordent le calcul.

- (b) Cette question est souvent incomplète soit l'existence est bien justifiée mais le calcul est absent, soit c'est l'inverse.

Bien distinguer « $Y$  prend des valeurs finies», argument erroné trop souvent donné par les candidats, de « $Y$  prend un nombre fini de valeurs» ou plus simplement « $Y$  est une variable finie»

Plusieurs candidats ne font pas la distinction entre variable discrète et variable finie.

6. (a) Même sans citer son nom, la formule du théorème de transfert est souvent donnée.

L'argumentation de l'existence de l'espérance est trop souvent farfelue: il ne suffit pas que  $X$  et  $Y$  admettent une espérance pour que  $XY$  en admette une!

La gestion des indices pose souvent problème, sauf pour ceux qui ont déjà brillé sur l'interversion des sommes.

- (b) Cette question est plutôt assez bien réussie, même si les calculs sont parfois erronés.

- (c) Cette question est plutôt assez bien réussie. La formule de la covariance est bien connue.

Mais les calculs sont souvent inaboutis. Les factorisations simples mériteraient d'être mieux travaillées.

7. La définition de l'indépendance pouvait être utilisée ici et seulement un contre-exemple donné, mais le contre-exemple n'est pas bien choisi ou consiste carrément en le cas général où «l'on voit bien à la fin que  $\frac{1}{nj} \neq \frac{1}{n^2} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}$ ».

La contraposée de l'implication entre l'indépendance et la covariance nulle pouvait aussi être utilisée. Mais de nombreuses confusions entre implication et équivalence covariance nulle/indépendance. Certains utilisent le bon argument de la non nullité de la covariance, mais aboutissent à une conclusion fausse.

8. (a) Cette question est très peu traitée.  
Certains candidats ne simulent pas les variables aléatoires, mais donnent les probabilités en écrivant par exemple `if k<=j : u=1/n*j else : u = 0.`
- (b) Cette question est bien réussie lorsqu'elle est abordée, mais quelques candidats repèrent bien quel quotient est calculé mais n'en connaissent pas la signification.
- (c) Cette question simple est pourtant rarement bien traitée.  
Rappelons qu'une droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés ne passe pas forcément par l'origine!  
La justification pour exclure le tracé 1 est souvent maladroite (mais compréhensible) : «la droite n'est pas affine.»
9. (a) Dans cette question beaucoup confondent événement et probabilité. Il n'était ici nullement question de probabilité. L'événement  $A_n$  ne dépend pas de  $k$ , ainsi les candidats devraient se questionner en écrivant  $A_n = [X = k] \cap [Y = k]$ .
- (b) Malgré la fréquente absence d'union à la question précédente, beaucoup de candidats commencent cette question une somme comme si elle leur semblait «implicite» dans la notation  $[X = k] \cap [Y = k]$ .  
Certains répondent incorrectement à la question précédente, mais grâce au résultat donné dans l'énoncé pensent à utiliser la formule des probabilités totales et retrouvent bien l'expression attendue. La formule des probabilités totales est incorrectement employée quand les étudiants tentent de l'utiliser, il manque quasi systématiquement une étape qui laisse à penser que c'est du bluff vu que le résultat attendu est donné par l'énoncé.
- (c) Cette question est bien réussie lorsqu'elle est abordée.  
Beaucoup de tentatives par étude de fonctions, rarement abouties.  
Rappelons que l'inégalité des accroissements finis est hors programme.
- (d) Si l'inégalité de gauche est souvent réussie, celle de droite l'est beaucoup moins.
- (e) Beaucoup de maladresses sur équivalents ont été rencontrées.  
Rappelons que le théorème d'encadrement concerne les limites, pas les équivalents.  
Rappelons également que  $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$  est à démontrer comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$ .
10. Des candidats marquent leurs quasi-seuls points de l'exercice dans cette question 10.
- (a) Cette question est généralement bien traitée. Les candidats vont chercher les points sur SQL et ils ont raison de le faire.  
Quelques candidats ajoutent "cond;" après WHERE : annexe lue mais mal comprise.

- (b) Le mot « suivante » n'a rien à faire dans la réponse donnée sur la copie.  
La requête est souvent comprise lorsque la réponse est donnée, parfois il manque la référence à l'année 2026.  
Toutefois les candidats gagneraient à être plus clairs dans leurs explications plutôt que de tourner autour du pot avec des longues phrases absconses.
- (c) Cette question est généralement assez bien traitée.  
La commande **GROUP BY** a rarement été comprise par les candidats.  
l'oubli de compagnie est presque systématique.  
Les étudiants considèrent que le tableau comporte seulement 4 compagnies et écrivent 4 scripts.
- (d) Cette question est assez bien traitée quand elle l'est.  
Les candidats qui comprennent que l'on peut invoquer la table **moyenne** sont rares.  
Dans cette question et la précédente, pas mal de confusion entre les noms de tables et les noms de colonnes. **DESC** est souvent oublié

## Exercice 2

### Partie I

- Cette question est généralement bien traitée.  
Cependant quelques candidats semblent avoir oublié que le passage à l'inverse ne change pas le signe d'une quantité.  
Pour d'autres, «  $\frac{1}{1-x}$  est défini pour  $x \neq 1$  et  $\ln(x)$  est défini pour  $x > 0$  donc  $f$  est définie sur  $]0, +\infty[\setminus\{1\}$  ».
- Pour déterminer les limites aux bornes du domaine de définition, certains candidats utilisent la « continuité de  $\ln$  en 0 et en  $+\infty$  » !  
Et trop de justifications se résument à « d'après les croissances comparées ».
- Des simplifications surprenantes:  $f'(x) = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{1-x}} = (1-x)^2 \times \frac{1}{1-x} = 1-x$ .  
Certains candidats passent par des formules très compliquées et peu pertinentes pour calculer cette dérivée pourtant assez simple.
- Les développements limités donnés avec formules usuelles sont en général faux, souvent des erreurs de signes.  
Ils sont souvent assez surprenants, voire non polynomiaux !!!  $\ln(x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  alors  
 $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} + o(x^2)$  ou encore  $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2(1-x)^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .
  - Cette question commence par « En déduire » : c'est une indication à utiliser la question précédente.  
Les équations de droite proposées ne donnent pas souvent pas une droite:  $y = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^4}$ .  
Dans la formulation d'une équation de droite, il est impératif de préciser «  $y = \dots$  » et de ne pas remplacer le signe « = » par « : ».

5. Cette question est assez bien réussie lorsqu'elle est traitée.  
La tangente est parfois tracée au hasard et pas toujours tangente à la courbe.

## Partie II

6. (a) La nature de cette série est en général bien connue.  
Mais souvent les candidats se limitent à une série de Riemann de paramètre 1, sans préciser que le paramètre est supérieur ou égal à 1 pour conclure à la divergence.  
Quelques candidats se contentent de dire qu'il s'agit de la série harmonique ou de Riemann sans donner sa nature et donc sans répondre à la question posée.
- (b) Cette question est en général bien réussie.  
Pour certains  $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k}$ . Rappelons que cette égalité est fausse et très surprenante!
- (c) Une question demande de faire le lien entre la divergence de la série et la divergence de la suite des sommes partielles, mais aussi d'étudier la monotonie de la suite des sommes partielles. En général les résolutions proposées sont mal rédigées et incomplètes.  
Certains indiquent que «la suite est divergente donc non majorée» sans donner l'argument de monotonie ou sans justifier que la suite n'est pas majorée.
7. Cette question est peu réussie.  
Beaucoup ont reconnu à tort une série exponentielle. D'autres n'ont regardé que la limite de la valeur absolue du terme général.  
Certains candidats pensent encore à tort qu'il suffit que le terme général d'une série tende vers 0 pour conclure à la convergence de la série (La question 6a) en donne un contre-exemple).
8. (a) Quand elle est abordée, cette question est assez bien réussie.  
Pour quelques uns l'adjacence se résume à la limite de la différence qui est nulle.
- (b) L'argumentation proposée par une majorité de candidats est incomplète.  
Beaucoup de candidats se contentent d'affirmer que les suites extraites convergent pour conclure que la suite converge.  
D'autres affirment que  $S_n(-1) = S_{2n}(-1) + S_{2n+1}(-1)$ .  
L'argument «d'après le cours» n'est évidemment pas suffisant ici.
- (c) Cette question est très peu traitée.  
Certains savent encadrer la limite de suites adjacentes par ces suites, mais n'arrivent pas à faire le lien avec l'inégalité attendue.
- (d) Cette question est très peu traitée.  
Sur les quelques réponses vues, les candidats ne sont restés que sur le cas pair et n'ont pas pensé au cas impair.  
Des candidats qui partent du cas pair et remplacent directement  $2n$  par  $n$  pour conclure  
Dans quelques rares cas, une récurrence est tentée mais qui se résume à l'initialisation ( $n = 1$ ).
9. (a) Cette question est en général mieux réussie que la question 7, la plupart du temps un critère de comparaison avec la série harmonique est invoqué plutôt que la divergence grossière.  
Beaucoup reconnaissent encore à tort, une série exponentielle, la moitié de ceux-là en déduisent la convergence de la série et l'autre moitié la divergence.
- (b) La croissance de la suite ou la positivité des termes est souvent oubliée pour justifier la limite.

### Partie III

10. (a) Le calcul de la première intégrale  $\int_0^a \frac{1}{1-t} dt$  est en général bien mené.

Mais beaucoup d'erreurs de signe lors du calcul de la deuxième intégrale  $\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2} dt$ .

Certains candidats font une disjonction de cas inutile selon le signe de  $a$ , aboutissant parfois au même résultat, parfois non.

- (b) La linéarité de l'intégrale nécessaire à cette question est en général bien comprise et bien utilisée mais ensuite, que de bidouillages dans les calculs! essentiellement :  $a + (a-1) \frac{-a}{1-a} = a - a = 0$  ou encore  $a - 1/a = 0$ .

11. La formule d'intégration par parties et l'hypothèse portant sur le caractère  $\mathcal{C}^1$  des fonctions sont en général données avec succès.

Mais diverses erreurs de signes dans les dérivées et primitives entraînent d'inévitables arnaques pour arriver au bon résultat.

Certains posent  $v'(t) = (1-t)^{n+1}$  au lieu de  $v'(t) = \frac{1}{(1-t)^{n+1}}$ .

12. Cette question est assez bien réalisée. Le raisonnement par récurrence est bien mené et bien rédigé.

13. (a) Beaucoup de truandages, notamment  $\frac{a}{1-t} \leq a$  ou  $\frac{a}{1-a} \leq a$ . Les inégalités s'enchaînent sans argument et les candidats essaient de prouver simultanément les deux côtés de l'encadrement, alors qu'ici il est bien plus simple de procéder en deux temps. Même l'étude du signe du quotient est mal menée, alors qu'il suffit d'évoquer la positivité du numérateur ET du dénominateur (il manque souvent l'un des deux).

L'inégalité  $\frac{a-t}{1-t} \leq a$  est rarement démontrée correctement; elle est affirmée la plupart du temps. Aucune copie de mon lot n'a pensé à étudier la décroissance de la fonction  $t \mapsto \frac{a-t}{1-t}$  sur  $[0, a]$ .

Beaucoup de candidats semblent ignorer que l'on n'a pas le droit de diviser deux inégalités membre à membre.

Quelques rares copies qui démontrent l'inégalité de droite en étudiant le signe de la différence, méthode efficace

- (b) Si la positivité du quotient est en général bien prouvée, beaucoup de truandages pour la majoration.

- (c) Cette question est bien traitée lorsqu'elle est abordée.

14. (a) Cette question est très rarement traitée.

- (b) Certains candidats ont proposé «`return np.log(2)`»! Ou encore quelques autres la différence entre la somme de question précédente et  $\ln(2)$ ...

Certains candidats proposent un programme qui détermine le plus petit entier  $n$  tel que  $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$  sans se préoccuper de la somme.

- c) Quand elle est donnée, la réponse est souvent juste, mais la justification est souvent absente. Certains ont cru que trois suites étaient représentées. Ils parlent de la courbe d'au dessus et la courbe d'en dessous, pensant qu'en orange est représentée la limite et que les croix du dessus et les croix du dessous représentent deux suites différentes, ou ils considèrent les points orange et les croix bleues "du dessus" ou "du dessous".

## Exercice 3

Les connaissances sur les équations différentielles et les systèmes différentiels sont rarement acquises.

### Partie I

1. Cette question est en général très bien traitée!  
Quelques candidats ne simplifient pas le calcul et n'aboutissent pas à 0.
2. Beaucoup d'incohérences :  $x'(t) + y'(t) = 0$  entraîne trop souvent  $x(t) + y(t) = 0$ , voire  $x(t) = y(t)$ .  
Peu pensent au théorème indiquant que si  $f' = 0$  sur un intervalle, alors  $f$  est constante sur l'intervalle.  
Parmi les candidats ayant réussi à faire le lien avec la fonction  $s$ , la plupart ont oublié d'utiliser  $x(0)$  et  $y(0)$  pour déterminer la valeur de la constante. Si la valeur de la constante est calculée dans la question suivante, l'évaluation a alors été faite de manière globale.
3. Cette question est très peu traitée et rarement réussie.  
Que de solutions exponentielles!  
Des solutions constantes  $(0, 0)$  ou  $(1, 1)$  par exemple.

### Partie II

4. Cette question est en général bien traitée.  
Mais quelques candidats affirment: « $P$  est triangulaire, elle est donc inversible» ; il faudrait préciser en plus que les coefficients diagonaux sont non nuls.
5. Cette question est assez bien traitée, quelques raisonnements un peu redondants.  
Les raisonnements suivants sont incomplets:
  - « $A - xI$  n'est pas inversible ssi  $\det(A - xI) = 0$ » sans faire le lien avec les valeurs propres.
  - « $x$  est valeur propre ssi  $\det(A - xI) = 0$  sans le lien avec l'inversibilité.
6. Cette question est assez bien traitée, beaucoup de raisonnements par l'absurde bien menés.  
D'autres raisonnent sur la dimension des sous-espaces propres, mais l'argument n'est pas explicitement au programme.  
Des confusions avec  $\dim A$  ou  $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  sont rencontrées. Certains pensent qu'une matrice n'admettant qu'un seul vecteur propre n'est pas diagonalisable. C'est faux, il suffit de penser à l'identité.  
Pour d'autres, si  $A$  n'est pas inversible, alors elle n'est pas diagonalisable. Ce qui est également incorrect, il suffit de penser à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
7. Cette question est en général bien traitée, mais parfois les produits matriciels sont parfois mal présentés.
8. Très peu de candidats ont répondu à cette question.

9. Cette question est assez bien réussie lorsqu'elle est traitée.  
Quelques fois, les calculs anticipent la question suivante.
10. Peu traitent cette question jusqu'au bout: majoritairement les candidats s'arrêtent à  $v(t) = cste$  et  $u(t) = cste \times t$ .
11. Peu de candidats abordent cette question et en général la traitent partiellement.

### Partie III

12. Quelques idées pertinentes, mais la mise en place n'est jamais vraiment réussie.  
En Python la matrice  $M^p$  ne se calcule pas avec la commande `M**p`, ni avec `M=np.dot(M,M)`.
13. Cette question est peu abordée.  
L'utilisation du polynôme annulateur est majoritaire quand la question est traitée, quelques candidats ont réussi à prouver l'inclusion  $\text{Sp}(N) \subset \{0\}$  mais rarement l'égalité  
La définition de la nilpotence semble être suffisante pour conclure, alors que la notion n'est pas au programme donc aucune connaissance ne peut être considérée comme «du cours» .
14. Cette question est assez bien traitée.  
Souvent les candidats admettent la question précédente (sous la forme  $\text{Sp}(N) = \{\lambda\}$ ) et aboutissent donc à  $N = \lambda I$  à l'issue de leur raisonnement par l'absurde, ce qui donne une contradiction qu'ils n'expliquent pas.
15. Des nombreuses confusions avec la question 16 sont rencontrées.  
La gestion du terme « $k = 0$ » a souvent posé problème.  
La dérivation terme à terme se retrouve mais l'indice 0 devient magiquement l'indice 1 (ou même pas!).
16. Cette question est très rarement abordée.  
Ceux qui essayent commencent leur raisonnement par  $X'(x) = NX(t)$ .
17. Cette question est rarement réussie.  
Le premier item assez bien réussi, le deuxième moins et le troisième jamais.  
Beaucoup de candidats utilisent une fonction «factoriel» dans le 3<sup>ème</sup> item sans vraiment comprendre l'intérêt de la boucle `for` en proposant `t**k/np.fact(k)`, peu savent compléter le dernier item par `np.dot(T,N)`.