

**CONCOURS
ECRICOME**

**PRÉPAS
ECG/ECT**

ACCESSIBLE AUX CPGE ECG
OU ECT

2026

ANNALES

Mathématiques Approfondies

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

VOIE ÉCONOMIQUE ET
COMMERCIALE
GÉNÉRALE

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE	PAGE 3
CORRIGÉ	PAGE 4
RAPPORT D'ÉPREUVE	PAGE 23

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

■ SUJET

- Deux exercices d'application des connaissances de base.
- Un problème faisant largement appel aux probabilités.

■ ÉVALUATION

- Les exercices et le problème sont pondérés relativement à leur longueur et leur difficulté.

■ ÉPREUVE

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a) • $f : t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, 1]$.
- Par le développement limité en 0, $e^x = 1 + x + o(x)$. Donc $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-t}}{t} = 1$.
- Alors f est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$.

D'où $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$ converge.

- (b) • $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue, positive sur $[1, +\infty[$.
- Et, pour tout $t \geq 1$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge.

Par critère de majoration pour les fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

2. (a) • $h : t \mapsto \left| \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \right|$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$
- h est prolongeable par continuité en 0.
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left| \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \right| = 0$ par croissance comparée, donc $\frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.
- Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Par critère de négligeabilité pour les fonctions positives,

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$ converge absolument donc converge.

- (b) Soit a un réel strictement négatif.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Et, pour tout $t > 0$: $-at \geq 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} = -\infty$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$

De plus $\frac{e^{-t} - 1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{t}$. Or $\int_0^{+\infty} \frac{-1}{t} dt$ diverge, ainsi, par critère d'équivalence

pour les fonctions de signe constant, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ diverge.

D'où $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$ diverge pour a un réel négatif ou nul.

3. (a) Remarquons que, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} = \frac{1 - e^{-at}}{t} - \frac{1 - e^{-t}}{t}$.

D'après 1.(a), les intégrales $\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ et $\int_0^1 \frac{1-e^{-at}}{t} dt$ convergent.

Par linéarité, $\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \int_0^x \frac{1-e^{-at}}{t} dt - \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$.

Avec le changement de variable affine $t = \frac{u}{a}$:

$$\int_0^x \frac{1-e^{-at}}{t} dt - \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_0^{ax} \frac{1-e^{-u}}{\frac{u}{a}} \frac{1}{a} du - \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt = \int_0^{ax} \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

Par la relation de Chasles,

$$\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \int_x^{ax} \frac{1-e^{-t}}{t} dt$$

puis la linéarité de l'intégrale pour les fonctions continues sur un segment :

$$\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \int_x^{ax} \frac{1}{t} dt - \int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Or $\int_x^{ax} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_x^{ax} = \ln(ax) - \ln(x) = \ln\left(\frac{ax}{x}\right) = \ln(a)$.

$$\text{D'où } \int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \ln(a) - \int_x^{ax} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

(b) Par définition, $G(a) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt$.

Or, pour tout $x > 0$, $\int_0^x \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t} dt = \ln(a) - \left(\int_1^{ax} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$.

D'après la question 1.(a), $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^{ax} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0$.

Ainsi $G(a) = \ln(a)$.

4. • la fonction $u \mapsto \frac{u-1}{\ln(u)}$ est continue sur $]0, 1[$

• la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ réalisant une bijection de $]0, +\infty[$ vers $]0, 1[$.

Par théorème de changement de variable, $\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du$ est de même nature que $\int_{+\infty}^0 \frac{e^{-t}-1}{-t} (-e^{-t}) dt$.

Or $\int_{+\infty}^0 \frac{e^{-t}-1}{-t} (-e^{-t}) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} dt$ et d'après la question 2.a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} dt$ converge.

Donc $\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du$ converge et $\int_0^1 \frac{u-1}{\ln(u)} du = G(2) = \ln(2)$.

5. (a) Par théorème sur les sommes de Riemann pour les fonctions continues sur le segment $[0, 1]$, comme φ est continue sur $[0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(t) dt.$$

(b)

```
import numpy as np
def Rect(n):
    s=0 # 0=f(0)
    for k in range(1,n):
        s=s+(k/n-1)/np.log(k/n)
    res=1/n*s
    return res
```

(c) Le programme renvoie $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(u_k)$ avec $u_0, \dots, u_{n-1}$ n réels tirés au hasard selon la loi uniforme sur $[0, 1]$.

D'après la loi des grands nombres, ce programme nous permet de déterminer une valeur approchée de $\mathbb{E}(f(U))$ où U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, donc il donne une valeur approchée de $\int_0^1 f(t)dt$.

(d) La méthode de la question 5.(b) semble donner une meilleure approximation car elle semble converger plus rapidement.

Exercice 2

1. (a) La matrice A est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux. Ainsi le spectre de A est $\{0, 5, 12\}$.

(b) Comme A est une matrice de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, A est diagonalisable.

(c)

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres 0 et 5.

Par ailleurs $A - 12I = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - 12I)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$$\text{D'où } D = V^{-1}AV \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. (a) $\varphi(P_0) = 0, \varphi(P_1) = 5x = 5P_1$.

Pour tout entier $k \geq 2$, $\varphi(P_k) = (x^2 - 1)k(k-1)x^{k-2} + 5x(kx^{k-1})$.

$$\text{Pour tout entier } k \geq 2, \varphi(P_k) = k(k+4)x^k - k(k-1)x^{k-2} = k(k+4)P_k - k(k-1)P_{k-2}.$$

(b) Soit P un polynôme unitaire de degré d où d est inférieur ou égal à n .

Pour $d = 0$, $\varphi(P) = 0$ donc $\varphi(P)$ est de degré $-\infty$ et n'a pas de coefficient dominant.

Pour $d = 1$, $\varphi(P) = 5xP'$ donc $\varphi(P)$ est de degré $1 + (d - 1) = d$ et de coefficient dominant $5d$.

Pour $d \geq 2$, $(x^2 - 1)P''(x)$ est de degré $2 + (d - 2) = d$ de coefficient dominant $d(d - 1)$ et $5xP'(x)$ est de degré $1 + (d - 1) = d$ de coefficient dominant $5d$. Comme $d(d - 1) + 5d = d(d + 4) > 0$, $\varphi(P)$ est un polynôme de degré d et de coefficient dominant $d(d + 4)$.

Ainsi pour $d \geq 1$, $\varphi(P)$ est de degré d et de coefficient dominant $d(d + 4)$ et pour $d = 0$, $\varphi(P) = 0$.

3. (a) **Linéarité** Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(P + \lambda Q)(x) &= (x^2 - 1)(P + \lambda Q)''(x) + 5x(P + \lambda Q)'(x) \\ &= (x^2 - 1)(P''(x) + \lambda Q''(x)) + 5x(P'(x) + \lambda Q'(x)) \\ &= (x^2 - 1)P''(x) + 5xP'(x) + \lambda((x^2 - 1)Q''(x) + 5xQ'(x)) \\ &= \varphi(P)(x) + \lambda\varphi(Q)(x)\end{aligned}$$

Ainsi φ est linéaire.

Stabilité Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Alors il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $P = \sum_{k=0}^n a_k P_k$.

Par linéarité de φ , $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi(P_k)$.

D'après 2.(a) : pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(P_k) \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.

D'où φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

(b) Rappelons que $\varphi(P_0) = 0$, $\varphi(P_1) = 5P_1$
et pour tout entier $k \geq 2$, $\varphi(P_k) = k(k + 4)P_k - k(k - 1)P_{k-2}$.

Donc $\text{Mat}_{(P_0, \dots, P_n)}(\varphi) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 5 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 12 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

avec les éléments diagonaux suivants : $-k(k-1)$, 0 , $k(k+4)$, 0 , $-n(n-1)$, 0 , $n(n+4)$.

(c) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Comme $\varphi(P_k) = k(k+4)P_k - k(k-1)P_{k-2}$, (cette formule est également valable pour $k = 1$ et pour $k = 0$), le degré de $\varphi(P_k)$ est inférieur ou égal à celui de P_k .

Donc par linéarité de φ , par stabilité par combinaison linéaire de $\mathbb{R}_k[x]$ et parce que $(P_0, \dots, P_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[x]$, pour tout P de $\mathbb{R}_k[x]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_k[x]$.

D'où, pour tout entier k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{R}_k[x]$ est stable par φ .

(d) La matrice de Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est A .

4. (a) La matrice de φ obtenue à la question 3.(b) étant triangulaire, les valeurs propres de φ sont les coefficients diagonaux, donc $\text{Sp}(\varphi) = \{k(k+4), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.

(b) La fonction $x \mapsto x(x+4)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $x \mapsto (x+4) + x$ strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $x \mapsto x(x+4)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ en particulier injective sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi si $(k, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, $k \neq j$, $k(k+4) \neq j(j+4)$.

D'où φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes.

(c) φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$, un espace vectoriel de dimension $n+1$ admettant $n+1$ valeurs propres distinctes. Donc φ est diagonalisable.

(d) $\diamond$ Comme φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes et que $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension $n+1$, alors les sous-espaces propres de φ sont des droites vectorielles.

Pour tout entier naturel k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un polynôme non nul Q_k tel que $E_{k(k+4)}(\varphi) = \text{Vect}(Q_k)$.

En notant c_k le coefficient dominant de Q_k et G_k le polynôme unitaire $\frac{1}{c_k}Q_k$,

$$E_{k(k+4)}(\varphi) = \text{Vect}(Q_k) = \text{Vect}(c_k G_k) = \text{Vect}(G_k)$$

$\diamond$ Soit H_k un polynôme unitaire tel que $E_{k(k+4)}(\varphi) = \text{Vect}(H_k)$. $\text{Vect}(G_k) = \text{Vect}(H_k)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G_k = \alpha H_k$ et comme G_k et H_k sont tous les deux unitaires, $\alpha = 1$ et $G_k = H_k$.

D'où, pour tout entier naturel k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique polynôme unitaire noté G_k tel que $E_{k(k+4)}(\varphi) = \text{Vect}(G_k)$.

(e) **Pour** $k = 0$, $E_{k(k+4)}(\varphi) = E_0(\varphi) = \ker \varphi$.

D'après la question 2.(a), P_0 est un polynôme non nul de $E_0(\varphi)$ qui est une droite vectorielle donc $E_0(\varphi) = \text{Vect}(P_0)$ et comme P_0 est unitaire, par définition de G_0 à la question précédente, $G_0 = P_0$.

Pour $k = 1$, rappelons que $\varphi(P_1) = 5P_1$ alors $P_1 \in E_{1(1+4)}(\varphi)$. Or P_1 est unitaire.

Par unicité de la question précédente, $G_1 = P_1$.

(f) $\diamond$ G_2 est unitaire

$\diamond$ $\varphi(G_2)(x) = \varphi(x^2) - \frac{1}{6}\varphi(1) = (12x^2 - 2) + 0 = 12 G_2(x)$. Donc $G_2 \in E_{2(2+4)}(\varphi)$

Par unicité prouvée à la question précédente $G_2(x) = x^2 - \frac{1}{6}$.

(g) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et d le degré de G_k .

Alors $\varphi(G_k) = k(k+4)G_k$.

Or d'après la question 2.(b) $\varphi(G_k)$ est de degré d et de coefficient dominant $d(d+4)$.

Et $k(k+4)G_k$ est de degré d de coefficient dominant $k(k+4)$.

Par l'injectivité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x(x+4)$ établie au 4.(b), $d = k$.

D'où, pour tout entier naturel k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, le degré de G_k est k .

5. (a) $Q'(x) = -P'(-x)$ et $Q''(x) = -(-P''(-x)) = P''(-x)$.

(b) Remarquons que

$$\begin{aligned}\varphi(Q)(x) &= (x^2 - 1)P''(-x) + 5x(-P'(-x)) \\ &= ((-x)^2 - 1)P''(-x) + 5(-x)P'(-x) \\ &= \varphi(P)(-x)\end{aligned}$$

Or $\varphi(P) = k(k+4)P$ donc $\varphi(P)(-x) = k(k+4)P(-x) = k(k+4)Q(x)$.

Or $Q \neq 0$.

D'où Q est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $k(k+4)$.

(c) Comme G_k est un vecteur propre de φ associé à la valeur $k(k+4)$, d'après la question précédente, $G_k(-x) \in E_{k(k+4)}(\varphi)$.

Or $E_{k(k+4)}(\varphi) = \text{Vect}(G_k)$.

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G_k(-x) = \alpha G_k(x)$.

Comme G_k est unitaire de degré k d'après la question 4.(g), le coefficient devant x^k est d'une part $(-1)^k$ et d'autre part α donc $\alpha = (-1)^k$.

Ainsi G_k est pair si k est pair et impair si k est impair.

6. **Existence** Soit (P, Q) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_n[x]$.

La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)(1-t^2)^{3/2}$ est continue sur le segment $[-1, 1]$.

Donc l'intégrale $\int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)^{3/2} dt$ existe.

Symétrie Soit (P, Q) un couple d'éléments de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \int_{-1}^1 Q(t)P(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \langle Q, P \rangle.$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

Bilinéarité Soit (P, Q, R) un triplet d'éléments de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$\begin{aligned}\langle P, Q + \lambda R \rangle &= \int_{-1}^1 P(t)(Q(t) + \lambda R(t))(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 (P(t)Q(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} + \lambda P(t)R(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}}) dt \\ &= \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt + \lambda \int_{-1}^1 P(t)R(t)(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \langle P, Q \rangle + \lambda \langle P, R \rangle\end{aligned}$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite et, par symétrie, linéaire à gauche, donc bilinéaire.

Définie-postive Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 (P(t))^2(1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt.$$

Or $\forall t \in [-1, 1], (P(t))^2(1-t^2)^{3/2} \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale (avec des bornes dans le sens croissant), $\langle P, P \rangle \geq 0$.

Supposons que $\langle P, P \rangle = 0$.

Comme $t \mapsto (P(t))^2(1-t^2)^{3/2}$ est continue, positive d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$, alors pour tout $t \in [-1, 1], (P(t))^2(1-t^2)^{3/2} = 0$, donc pour tout $t \in [-1, 1], P(t) = 0$. Le polynôme P admet alors une infinité de racines et donc est nul.

D'où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

7. (a) La fonction $t \mapsto (1-t^2)^{3/2}$ est continue sur le segment $[-1, 1]$ donc l'intégrale $\int_{-1}^1 (1-t^2)^{3/2} dt$ converge.

De plus $\varphi : s \mapsto \sin(s)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement croissante. De plus

$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, alors φ est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$.

Par formule de changement de variable

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{3/2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(s))^{3/2} \cos s ds$$

Pour $s \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 1 - \sin^2(s) = \cos^2(s)$ et $\cos(s) \geq 0$.

$$\text{D'où } \int_{-1}^1 (1-t^2)^{3/2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(s) ds.$$

- (b) Rappelons que, pour $s \in \mathbb{R} \cos^2(s) = \frac{1 + \cos(2s)}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } \cos^4(s) &= \frac{(1 + \cos(2s))^2}{4} \\ &= \frac{1 + 2\cos(2s) + \cos^2(2s)}{4} \\ &= \frac{1 + 2\cos(2s) + \frac{1 + \cos(4s)}{2}}{4} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $s, \cos^4(s) = \frac{1}{8}(\cos(4s) + 4\cos(2s) + 3)$.

- (c) $\|G_0\|^2 = \langle G_0, G_0 \rangle = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{3/2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(s) ds = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin(4s) + 2\sin(2s) + 3s \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.$

$$\text{D'où } \|G_0\|^2 = \frac{3\pi}{8}.$$

8. (a) La fonction $f : t \mapsto P'(t)(1-t^2)^{5/2}$ est dérivable sur $[-1, 1]$.

$$\text{Et } f' : t \mapsto P''(t)(1-t^2)^{5/2} - 5P'(t)(1-t^2)^{3/2}.$$

(b) Remarquons que

$$\begin{aligned}\langle \varphi(P), Q \rangle &= \int_{-1}^1 ((t^2 - 1)P''(t) + 5tP'(t))Q(t)(1 - t^2)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 (-P''(t)(1 - t^2)^{\frac{5}{2}} + 5tP'(t)(1 - t^2)^{\frac{3}{2}})Q(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 f'(t)Q(t) dt\end{aligned}$$

Par une intégration par partie, f et Q étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$,

$$\begin{aligned}\langle \varphi(P), Q \rangle &= - \left([f(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f(t)Q'(t) dt \right) \\ &= - \left(\left[P'(t)Q(t)(1 - t^2)^{\frac{5}{2}} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)(1 - t^2)^{\frac{5}{2}} dt \right)\end{aligned}$$

Ainsi $\langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 P'(t)Q'(t)(1 - t^2)^{\frac{5}{2}} dt.$

(c) Remarquons que dans l'expression obtenue P et Q jouent des rôles symétriques.

Donc pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[x]$,

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \langle \varphi(Q), P \rangle = \langle P, \varphi(Q) \rangle.$$

D'où φ est un endomorphisme symétrique.

(d) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Orthogonalité La famille $(G_0, \dots, G_k)$ est formée de vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.

Or φ est symétrique, donc $(G_0, \dots, G_k)$ est orthogonale.

Liberté Comme $(G_0, \dots, G_k)$ est orthogonale et composée de vecteurs non nuls, alors $(G_0, \dots, G_k)$ est libre.

Cardinal le cardinal de $(G_0, \dots, G_k)$ est égale à la dimension de $\mathbb{R}_k[x]$.

Ainsi, la famille $(G_0, \dots, G_k)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[x]$.

(e) La famille $(G_0, \dots, G_{k-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$. D'après la question précédente G_k est orthogonal à tout élément de cette base.

Ainsi, G_k est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.

9. (a) Soit (P, Q, R) un triplet d'éléments de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$\begin{aligned}\langle PQ, R \rangle &= \int_{-1}^1 (P(t)Q(t))R(t)(1 - t^2)^{\frac{5}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 P(t)(Q(t)R(t))(1 - t^2)^{\frac{5}{2}} dt \\ \langle P, QR \rangle\end{aligned}$$

D'où $\langle PQ, R \rangle = \langle P, QR \rangle.$

- (b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ de degré d .

Alors $P \in \mathbb{R}_d[x]$ et la famille $\left(\frac{G_0}{\|G_0\|}, \dots, \frac{G_d}{\|G_d\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_d[x]$.

Par expression des coordonnées dans une base orthonormée, $P = \sum_{i=0}^d \left\langle P, \frac{G_i}{\|G_i\|} \right\rangle \frac{G_i}{\|G_i\|}$.

D'où, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ de degré d , $P = \sum_{i=0}^d \frac{\langle P, G_i \rangle}{\|G_i\|^2} G_i$.

- (c) D'après la formule précédente appliquée au polynôme $xG_k(x)$ de degré $k+1$,

$$xG_k(x) = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{\langle xG_k(x), G_i(x) \rangle}{\|G_i\|^2} G_i(x)$$

Soit $i < k-1$.

D'après la question 9.(a), $\langle xG_k, G_i \rangle = \langle G_k, xG_i \rangle$.

Or xG_i est de degré $i+1 < k$. Donc d'après la question 8.(e), $\langle G_k, xG_i \rangle = 0$.

D'où, il existe un unique triplet de réels $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xG_k(x) = \alpha_k G_{k+1}(x) + \beta_k G_k(x) + \gamma_k G_{k-1}(x)$$

- (d) Rappelons que le polynôme G_k est unitaire, donc le coefficient dominant de $xG_k(x)$ est 1.

Or le polynôme G_{k+1} est $k+1$, celui de G_k est k et celui de G_{k-1} est $k-1$.

Donc par égalité des coefficients dominants, $\alpha_k = 1$.

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}, -xG_k(-x) = G_{k+1}(-x) + \beta_k G_k(-x) + \gamma_k G_{k-1}(-x)$.

donc, en utilisant la question 5.(c),

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-1)^{k+1} xG_k(x) = (-1)^{k+1} G_{k+1}(x) + \beta_k (-1)^k G_k(x) + \gamma_k (-1)^{k-1} G_{k-1}(x)$$

ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, xG_k(x) = \alpha_k G_{k+1}(x) - \beta_k G_k(x) + \gamma_k G_{k-1}(x)$.

Par unicité des coefficients, $-\beta_k = \beta_k$. Ainsi $\beta_k = 0$.

- (e) On applique la formule précédente avec $k=2$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, G_3(x) = xG_2(x) - \gamma_2 G_1(x) = x \left(x^2 - \frac{1}{6} \right) - \frac{5}{24} x = x^3 - \frac{3}{8} x.$$

10. (a)

```
def Prod(P,n):
    Q=np.zeros(n+1)
    for k in range(1,n+1):
        Q[k]=P[k-1]
    return Q
```

- (b)

```
def VP(n,k):
    u=np.zeros(n+1)
    u[0]=1
    if k==0 :
```

```
        return u
v=np.zeros(n+1)
v[1]=1
for i in range(1,k):
    new=Prod(v,n)-i*(i+3)/(4*(i+2)*(i+1))*u
    u=v
    v=new
return v
```

Problème

Partie I

1. (a) Comme $x \neq 1$, $\sum_{k=1}^r x^k = x \frac{1-x^r}{1-x}$.

(b)

$$\begin{aligned} (1-x)^2 \sum_{k=1}^r kx^{k-1} &= (1-2x+x^2) \sum_{k=1}^r kx^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^r kx^{k-1} - 2 \sum_{k=1}^r kx^k + \sum_{k=1}^r kx^{k+1} \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} (i+1)x^i - 2 \sum_{i=1}^r ix^i + \sum_{i=2}^{r+1} (i-1)x^i \\ &= \left(\sum_{i=0}^{r-1} ix^i - 2 \sum_{i=1}^r ix^i + \sum_{i=2}^{r+1} ix^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{r-1} x^i - \sum_{i=2}^{r+1} x^i \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^r ix^i - rx^r - 2 \sum_{i=1}^r ix^i + \sum_{i=1}^r ix^i - x + (r+1)x^{r+1} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^r x^i + 1 - x^r - \sum_{i=1}^r x^i - x + x^{r+1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi $(1-x)^2 \sum_{k=1}^r kx^{k-1} = 1 - (r+1)x^r + rx^{r+1}$ et $\sum_{k=1}^r kx^{k-1} = \frac{1 - (r+1)x^r + rx^{r+1}}{(1-x)^2}$.

(c) On considère un lancer comme une expérience de Bernoulli dont le succès est l'obtention d'une valeur non nulle.

Y représente le rang du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succès $\frac{d}{d+1}$.

Donc Y suit la loi géométrique de paramètre $\frac{d}{d+1}$,

alors $\mathbb{E}(Y) = \frac{d+1}{d}$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{1 - \frac{d}{d+1}}{(\frac{d}{d+1})^2} = \frac{d+1}{d^2}$.

(d) L'événement $[Y > r]$ est l'événement les r premiers lancers ont donné une valeur nulle.

Or la probabilité d'obtenir une valeur nulle lors d'un lancer est $\frac{1}{d+1}$.

D'où par indépendance des lancers, $\mathbb{P}(Y > r) = \left(\frac{1}{d+1} \right)^r$.

2. (a) Sachant $[Y > r]$, X prend de façon certaine la valeur r .

Donc $\mathbb{E}(X|[Y > r]) = r$.

(b) Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Sachant $[Y = i]$, à l'issue du $i^{\text{ème}}$ lancer, le compteur du nombre de faces 0 consécutives est réinitialisé à 0 et les lancers à partir du $(i + 1)^{\text{ème}}$ reprennent dans les conditions initiales, avec donc une espérance du nombre de lancers nécessaires à partir du $(i + 1)^{\text{ème}}$ jusqu'à l'obtention de r faces 0 consécutives qui est égale à $\mathbb{E}(X)$.

D'où $\mathbb{E}(X|[Y = i]) = i + \mathbb{E}(X)$.

3. (a) Les événements $[Y = 1], \dots, [Y = r], [Y > r]$ forment un système complet d'événements. Donc, d'après la formule de l'espérance totale,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^r \mathbb{E}(X|[Y = i])P(Y = i) + \mathbb{E}(X|[Y > r])P(Y > r)$$

En utilisant les résultats des questions précédentes :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^r iP(Y = i) + \mathbb{E}(X) \sum_{i=1}^r P(Y = i) + \mathbb{E}(X|[Y > r])P(Y > r).$$

On reconnaît $\sum_{i=1}^r P(Y = i) = P(Y \leq r) = 1 - P(Y > r)$.

D'où $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^r iP(Y = i) + \mathbb{E}(X) (1 - P(Y > r)) + rP(Y > r)$.

- (b) D'après la question précédente, $\mathbb{E}(X) = \frac{\sum_{i=1}^r iP(Y = i)}{P(Y > r)} + r$.

En reprenant les notations p et q utilisées dans la réponse 1.(d) telles que $P(Y = i) = q^{i-1}p$ et en utilisant les résultats des questions précédentes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= p \frac{1 - (r+1)q^r + rq^{r+1}}{(1-q)^2q^r} + r \\ &= \frac{1 - (r+1)q^r + rq^{r+1}}{(1-q)q^r} + r \\ &= \frac{1 - (r+1)q^r + rq^{r+1} + rq^r - rq^{r+1}}{(1-q)q^r}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(X) = \frac{1 - q^r}{(1-q)q^r} = \frac{1}{1-q} \left(\left(\frac{1}{q} \right)^r - 1 \right) = \frac{d+1}{d} ((d+1)^r - 1).$$

D'où $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{d} ((d+1)^{r+1} - d - 1)$.

Partie II

4. U_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, d \rrbracket$ et son espérance est $\frac{d}{2}$.

5. (a) $S_2(\Omega) = \llbracket 0, 2d \rrbracket$.

(b) Soit $k \in S_2(\Omega)$.

Les événements $[U_1 = i]$ pour $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$ forment un système complet d'événements et par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{i=0}^d \mathbb{P}([S_2 = k] \cap [U_1 = i]) = \sum_{i=0}^d \mathbb{P}([U_2 = k - i] \cap [U_1 = i])$$

Comme U_1 et U_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{i=0}^d \mathbb{P}(U_1 = i) \mathbb{P}(U_2 = k - i).$$

(c) Soit $k \in S_2(\Omega)$.

Or U_1 suit une loi uniforme sur $\llbracket 0, d \rrbracket$.

$$\text{Alors } \mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{i=0}^d \frac{1}{d+1} \mathbb{P}(U_2 = k - i) = \sum_{j=k-d}^k \frac{1}{d+1} \mathbb{P}(U_2 = j).$$

Cas où $k < d$. $\mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{d+1} \mathbb{P}(U_2 = j).$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{d+1} \right)^2 = \frac{k+1}{(d+1)^2}.$$

Cas où $k \geq d$. $\mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{j=k-d}^d \frac{1}{d+1} \mathbb{P}(U_2 = j).$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(S_2 = k) = \sum_{i=k-d}^d \left(\frac{1}{d+1} \right)^2 = \frac{(k-d) - d + 1}{(d+1)^2}.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } k \text{ de } S_2(\Omega), \mathbb{P}(S_2 = k) = \begin{cases} \frac{k+1}{(d+1)^2} & \text{si } 0 \leq k < d \\ \frac{2d+1-k}{(d+1)^2} & \text{si } k \geq d \end{cases}$$

(d) Remarquons que $[S_2 \geq d] = \bigcup_{k=0}^{2d} [S_2 = k].$

Par disjonction des événements, $\mathbb{P}(S_2 \geq d) = \sum_{k=d}^{2d} \mathbb{P}(S_2 = k).$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \mathbb{P}(S_2 \geq d) &= \frac{1}{(d+1)^2} \sum_{k=d}^{2d} (2d+1-k) \\ &= \frac{1}{(d+1)^2} \sum_{\ell=1}^{d+1} \ell \\ &= \frac{1}{(d+1)^2} \frac{(d+1)(d+2)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(S_2 \geq d) = \frac{d+2}{2(d+1)}.$$

6. (a)

```
def Atteinte(d):
    res=0
    S=0 #0<d
    while S<d:
        res=res+1
        S=S+rd.randint(0,d+1)
    return res
```

(b)

```
def EspT(d,N):
    E=0
    for k in range(N):
        E=E+Atteinte(d)
    return 1/N*E
```

Cette fonction utilise la loi faible des grands nombres.

(c) On conjecture que $\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T) = e$

7. (a) Soit N naturel non nul.

Pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $[V \geq i] = [V = i] \cup [V \geq i + 1]$ et cette réunion est disjointe, donc $\mathbb{P}(V = i) = \mathbb{P}(V \geq i) - \mathbb{P}(V \geq i + 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{i=1}^N i \mathbb{P}(V = i) &= \sum_{i=1}^N i \mathbb{P}(V \geq i) - \sum_{i=1}^N i \mathbb{P}(V \geq i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^N i \mathbb{P}(V \geq i) - \sum_{i=2}^{N+1} (i-1) \mathbb{P}(V \geq i) \\ &= \sum_{i=1}^N i \mathbb{P}(V \geq i) - \left(\sum_{i=1}^N (i-1) \mathbb{P}(V \geq i) + N \mathbb{P}(V \geq N+1) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{P}(V \geq i) - N \mathbb{P}(V \geq N+1) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(V \geq n) = \sum_{i=1}^N i \mathbb{P}(V = i) + N \mathbb{P}(V \geq N+1).$$

(b) Soit N un entier naturel non nul.

Grâce à la positivité des termes et à la convergence de $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(V \geq n) : \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(V \geq n) \leq$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(V \geq n).$$

$$\text{Donc } \sum_{i=1}^N i \mathbb{P}(V = i) \leq \sum_{i=1}^N i \mathbb{P}(V = i) + N \mathbb{P}(V \geq N+1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(V \geq n).$$

Alors $\sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}(V = n)$ est une série à termes positifs dont la suite des sommes partielles est

majorée, donc $\sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}(V = n)$ converge absolument et V admet une espérance.

(c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Remarquons que } N \mathbb{P}(V \geq N+1) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} N \mathbb{P}(V = k).$$

$$\text{Or } \forall k \in \llbracket N+1, +\infty \rrbracket, N \mathbb{P}(V = k) \leq k \mathbb{P}(V = k).$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} n \mathbb{P}(V = n)$ converge d'après la question précédente.

$$\text{Donc } 0 \leq N \mathbb{P}(V \geq N+1) \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(V = k).$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(V = k) = 0$ (reste de série convergente), par encadrement

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N \mathbb{P}(V \geq N+1) = 0.$$

(d) En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité 7.(a) où tous les termes ont une limite, $E(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(V \geq n).$

8. (a) Pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $h(t) = r!(1-t)^{-(r+1)}.$

$t \mapsto 1-t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et $x \mapsto x^{-(r+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

sur $]0, +\infty[$. Par composition, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right].$

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel k ,

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], h^{(k)}(t) = (r+k)!(1-t)^{-(r+1+k)} = \frac{(r+k)!}{(1-t)^{r+k+1}}.$$

$$(I) \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], h^{(0)}(t) = h(t) = (r+0)!(1-t)^{-(r+1+0)}.$$

(H) Soit k un entier naturel.

$$\text{Supposons que } \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad h^{(k)}(t) = (r+k)!(1-t)^{-(r+1+k)} = \frac{(r+k)!}{(1-t)^{r+k+1}}.$$

$$\text{Alors } \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad h^{(k+1)}(t) = (r+k)!(r+1+k)(1-t)^{-(r+1+k)-1} = \frac{(r+k+1)!}{(1-t)^{r+(k+1)+1}}.$$

$$\text{Ainsi par le principe de récurrence, } \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad h^{(k)}(t) = (r+k)!(1-t)^{-(r+1+k)} = \frac{(r+k)!}{(1-t)^{r+k+1}}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Les bornes de $\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} dt$ étant dans le sens croissant et l'intégrande étant positive :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} dt \right| = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} dt$$

Pour tout $t \in [0, x]$, $t \leq \frac{1}{2}$, d'où $1-t \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi } (1-t)^{r+n+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{r+n+1} = \frac{1}{2^{r+n+1}}, \quad \frac{1}{(1-t)^{r+n+1}} \leq 2^{r+n+1}.$$

$$\text{Donc, } \forall t \in [0, x], \quad \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} \leq 2^{r+n+1}(x-t)^{n-1}.$$

$$\text{Par croissance de l'intégrale, } \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} dt \leq 2^{r+n+1} \left[-\frac{1}{n}(x-t)^n \right]_0^x.$$

$$\text{Or } \left[-\frac{1}{n}(x-t)^n \right]_0^x = \frac{x^n}{n}.$$

$$\text{D'où, } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1-t)^{r+n+1}} dt \right| \leq 2^{r+n+1} \frac{x^n}{n}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

h étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, par formule de Taylor avec reste intégral :

$$h(x) = \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} h^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{(r+k)!}{k!} x^k + \frac{(r+n+1)!}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+2}} dt$$

D'après la question précédente

$$0 \leq \frac{(r+n+1)!}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+2}} dt \leq \frac{(r+n+1)!}{n!} 2^{r+n+2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$

$$\text{Or } \frac{(r+n+1)!}{n!} 2^{r+n+2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} = 2^{r+1} (2x)^{n+1} (n+2) \dots (n+r+1). \text{ Donc } \frac{(r+n+1)!}{n!} 2^{r+n+2} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2^{r+1} (2x)^{n+1} n^r.$$

(le nombre de facteurs du produit $(n+2) \dots (n+r+1)$ est fixe égal à r)

$$\text{Comme } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad |2x| < \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (2x)^{n+1} = 0.$$

$$\text{De plus, par croissances comparées, } \lim_{n \rightarrow \infty} (2x)^{n+1} n^r = 0.$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(r+n+1)!}{n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+2}} dt = 0$.

Donc $\sum_{n \geq 1} \frac{(r+n)!}{n!} x^n$ converge de somme $h(x)$.

D'où, la série $\sum_{n \geq 0} (n+r) \dots (n+1) x^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+r) \dots (n+1) x^n = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$.

(d) Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T \geq n) = \frac{\binom{n+d-2}{n-1}}{(d+1)^{n-1}} = \frac{1}{(d-1)!} \frac{(n+d-2)!}{(n-1)!} \left(\frac{1}{d+1}\right)^{n-1}$.

D'après la question précédente avec $x = \frac{1}{d+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ($d \geq 2$) et $r = d-1$.

La série $\sum_{n \geq 0} (n+d-1) \dots (n+1) \left(\frac{1}{d+1}\right)^n$ converge donc la série $\sum_{n \geq 1} (n+d-2) \dots n \left(\frac{1}{d+1}\right)^{n-1}$ converge.

D'où $\sum \mathbb{P}(T \geq n)$ converge et T admet une espérance finie.

$$\begin{aligned} \text{Et } \mathbb{E}(T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T \geq n) \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} (n+d-2) \dots n \left(\frac{1}{d+1}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+d-1) \dots (n+1) \left(\frac{1}{d+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \frac{(d-1)!}{\left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{d}{d+1}\right)^d} \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}(T) = \left(\frac{d+1}{d}\right)^d$.

(e) $\forall d \geq 2, \mathbb{E}(T) = \left(1 + \frac{1}{d}\right)^d = \exp\left(d \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right)\right)$.

Comme $\lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{1}{d} = 0$, alors $\ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) \underset{d \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{d}$. Donc $d \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) \underset{d \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

Donc $\lim_{d \rightarrow +\infty} d \ln\left(1 + \frac{1}{d}\right) = 1$ et par composition de limites, $\lim_{d \rightarrow +\infty} e^{d \ln(1 + \frac{1}{d})} = e$.

D'où $\lim_{d \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T) = e$.

Partie III

9. (a) $S_1 = U_1$,

S_1 a pour densité $f_1 : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{si } x \in [0, d] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Et $\mathbb{E}(S_1) = \frac{d}{2}$ et $\mathbb{V}(S_1) = \frac{d^2}{12}$.

(b) Pour $x \in]-\infty, 0[$, $\mathbb{P}(S_2 \leq x) = 0$ et pour $x \in [2d, +\infty[$, $\mathbb{P}(S_2 \leq x) = 1$.

D'où, pour tout réel x de $] -\infty, 0[\cup [2d, +\infty[$, $f_2(x) = 0$.

(c) $S_2 = U_1 + U_2$ avec U_1 et U_2 indépendantes, à densité avec f_1 bornée.

Une densité de S_2 est alors donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_1(x-t) dt$$

Soit $x \in [0, d]$.

Remarquons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_1(x-t) = \begin{cases} \frac{1}{d} & \text{si } x-t \in [0, d] \text{ ou encore } t \in [x-d, x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $\forall t \in [0, d]$, $f_1(t)f_1(x-t) = \begin{cases} \frac{1}{d^2} & \text{si } t \in [x-d, x] \text{ et } t \in [0, d] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Or $x \in [0, d]$. Donc $x-d \leq 0$. Alors $[x-d, x] \cap [0, d] = [0, x]$.

Donc $\forall x \in [0, d]$, $f_2(x) = \int_0^x \frac{1}{d^2} dt$.

D'où, pour tout réel x de $[0, d]$, $f_2(x) = \frac{x}{d^2}$.

(d) Soit $x \in]d, 2d[$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $f_1(t)f_1(x-t) = \begin{cases} \frac{1}{d^2} & \text{si } t \in [x-d, x] \cap [0, d] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Or $x \in]d, 2d[$. Donc $x-d > 0$. Alors $[x-d, x] \cap [0, d] = [x-d, d]$.

Donc $\forall x \in]d, 2d[$, $f_2(x) = \int_{x-d}^d \frac{1}{d^2} dt = \frac{2d-x}{d^2}$.

D'où, pour tout réel x , $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{d^2} & \text{si } 0 \leq x \leq d \\ \frac{2d-x}{d^2} & \text{si } d < x < 2d \\ 0 & \text{si } 2d \leq x \end{cases}$.

10. (a) Comme pour tout réel x de $] -\infty, 0[$, $\mathbb{P}(S_{n+1} \leq x) = 0$, Alors $\forall x \in] -\infty, 0[$, $f_{n+1}(x) = 0$.

(b) $S_{n+1} = S_n + U_{n+1}$. D'après le lemme des coalitions $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ et U_{n+1} sont indépendantes.

De plus f_1 est bornée.

Une densité de S_{n+1} est alors donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)f_n(t) dt$$

$$\text{Or } \forall t \in [0, d], f_1(x-t)f_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!d^{n+1}} & \text{si } t \in [x-d, x] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Or $x \in [0, d]$. Donc $x-d \leq 0$. Alors $[x-d, x] \cap [0, d] = [0, x]$.

$$\text{Donc } \forall x \in [0, d], f_2(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!d^{n+1}} dt = \frac{x^n}{n!d^{n+1}}.$$

$$\text{D'où, pour tout réel } x \text{ de } [0, d], f_{n+1}(x) = \frac{x^n}{n!d^{n+1}}.$$

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Alors } \mathbb{P}(S_n < d) = \int_{-\infty}^d f_n(x) dx.$$

Par récurrence (initialisation à la question 9.(a) et hérédité à la question 10) :

$$\forall x \in]-\infty, 0[, f_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0, d], f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!d^n}.$$

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(S_n < d) = \int_0^d f_n(x) dx = \frac{1}{(n-1)!d^n} \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^d.$$

$$\text{D'où } \mathbb{P}(S_n < d) = \frac{1}{n!}.$$

12. (a) $[T = 1] = [S_1 \geq d] = [U_1 \geq d]$.

$$\text{Donc } \mathbb{P}(T = 1) = 0.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Remarquons que } [T > n] = [S_1 < d] \cap \dots \cap [S_n < d].$$

Les variables $U_1, \dots, U_n$ étant positives, $S_1 \leq \dots \leq S_n$.

$$\text{Ainsi } [T > n] = [S_n < d].$$

(c) D'après les questions 11. et 12.(b),

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(S_n < d) = \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(T \geq n+1) = \mathbb{P}(T-1 \geq n)$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1^n}{n!} \text{ converge en tant que série exponentielle donc } \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(T-1 \geq n) \text{ converge.}$$

$$\text{D'où, d'après la question 7, } T-1 \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(T-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T-1 \geq n) =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1.$$

$$\text{Enfin, } T = (T-1) + 1. \quad \text{Donc } T \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T-1) + 1 = e.$$

RAPPORT D'ÉPREUVE

1 Remarques globales

1.1 Forme

Nous rappelons une nouvelle fois qu'une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire. Elle permet de comprendre la problématique de chaque exercice et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles. Il est ainsi regrettable que, faute de temps, nombreux sont ceux ne traitent le problème que de manière superficielle et n'ont ainsi pas la possibilité de mettre en valeur leurs compétences en probabilité.

La plupart des copies sont bien présentées et les résultats sont bien mis en évidence. On trouve malheureusement également des copies très mal présentées, avec énormément de ratures et une graphie très peu lisible. Ce simple effet de contraste n'est pas en faveur de ces copies.

Rappelons qu'une question illisible ne sera pas lue, donc ne rapportera pas de points et met le correcteur dans une position peu favorable pour les questions suivantes. Nous ajouterons aussi qu'il faut éviter les abréviations, en particulier si elles sont obscures (SATP ou IFCP ?)

Un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi, toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière. Il n'est pas dérangeant de traiter des parties dans un ordre différent, mais revenir temporairement sur diverses questions, à de nombreuses reprises, est pénible et ne permet pas une bonne saisie du raisonnement du candidat pour le correcteur.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 5,6, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

1.2 Fond

La majorité des candidats a traité les 2 exercices, mais on peut regretter que le problème ne soit souvent traité que trop superficiellement.

Les copies montrent certaines compétences dans les trois domaines : analyse, algèbre et probabilités. On retrouve cependant bien trop d'erreurs sur certaines notions de base comme les sommes géométriques ou la densité d'une loi uniforme.

Les questions informatiques sont traitées par la majorité des candidats. Un fléchissement des compétences en informatique par rapport aux années précédentes est toutefois à déplorer.

Il va sans dire que toute réponse doit être justifiée par des arguments mathématiques rigoureux. Ainsi:

- les récurrences demandées ne sont pas « évidentes ». Il faut les rédiger. Un laconique « Par itérations successives » n'est pas une preuve.
- lorsque l'énoncé demande de démontrer un point de cours, se contenter de dire que « c'est vrai d'après le cours » n'est pas suffisant.
- les réponses du type « par un raisonnement similaire à la question précédente » ne sont pas acceptables.

2 Remarques question par question

Exercice 1

1. Il est regrettable qu'une telle question basique sur la convergence d'une intégrale ne soit pas mieux traitée.
 - (a) On retrouve ici beaucoup trop de comparaisons par équivalence ou négligeabilité non justifiées et/ou fausses. La continuité de l'intégrande est bien trop souvent oubliée.
 - (b) Les arguments de négligeabilité sont en général corrects mais la positivité ou la continuité sont trop souvent oubliées.
2. (a) Beaucoup de copies ne remarquent pas que la fonction étudiée n'est pas positive (ou de signe constant).
 Cette question a donné lieu à de très nombreux arguments aberrants (« simplification » fausse, sommes d'équivalents, majorations erronées, etc).
 Un argument du type « par les mêmes arguments que précédemment ... » n'est pas acceptable. Le raisonnement complet et détaillé même s'il est similaire est attendu.
- (b) Comme précédemment, le signe de la fonction à intégrer n'est pas pris en compte pour utiliser les critères de comparaison.
 Le fait qu'un critère de comparaison ne fonctionne pas ne permet pas d'affirmer que l'intégrale diverge.
 La distinction $a = 0$ et $a < 0$ est peu faite.
3. (a) Peu de copies se préoccupent de justifier la convergence des intégrales pour utiliser des arguments de linéarité. Cela conduit en particulier certains à considérer que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge (ce qui est faux). Le changement de variable affine est en général bien vu et bien fait.
- (b) La valeur de $G(a)$ est trouvée, mais la limite nulle de l'intégrale est souvent mal justifiée.
4. Une rédaction propre et rigoureuse du changement de variable est attendue. Les hypothèses du changement de variables sont rarement vérifiées ou mal vérifiées. On trouve aussi beaucoup de confusions sur les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction $t \mapsto e^{-t}$.
5. (a) Cette question de cours est en général bien traitée.
- (b) Cette première question d'informatique est assez souvent bien traitée même si la gestion du cas $k = 0$ a posé des problèmes.
- (c) Cette question proposait la mise en place d'une méthode de Monte-Carlo pour estimer la valeur d'une intégrale. Il est regrettable que si peu de copies montrent une compréhension de cette méthode pourtant explicitement au programme ou de la loi des grands nombres qu'elle met en jeu.
- (d) Cette question est globalement bien réussie même si on a pu rencontrer des arguments assez fantaisistes justifiant que la méthode probabiliste était ici plus efficace.

Exercice 2

1. (a) Cette question est en général bien traitée.
(b) Cette question est en général bien traitée même si on trouve parfois des arguments fallacieux du type « A est triangulaire supérieure donc diagonalisable ». Certains déterminent à cette question les sous-espaces propres et prouvent que la somme des dimensions est égale à 3. Cet argument est acceptable mais était plutôt attendu à la question suivante.
(c) On peut regretter des erreurs de calcul mais cette question a globalement été bien traitée.
2. (a) Certains donnent uniquement $\varphi(P_2)$ au lieu de $\varphi(P_k)$. Les calculs ne sont pas toujours menés jusqu'au bout et certaines copies ne simplifient pas le calcul $\varphi(P_k)$.
(b) Cette question est en général correcte mais les justifications sont souvent peu convaincantes ou lacunaires, le cas $d = 0$ a souvent été oublié.
3. (a) Cette question est en général bien traitée même si on peut regretter que la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par φ ne soit pas traitée proprement et soit simplement annoncée comme « conséquence de la question précédente » sans plus de détails.
(b) Cette question en général bien traitée malgré quelques erreurs de calcul et/ou d'écriture.
(c) Cette question a globalement été assez mal traitée, dans un certain nombre de copie, la justification se limite à « Comme dans la question 3.(a). ... »
(d) Cette question est en général bien traitée mais si dans certaines copies on voit apparaître des polynômes comme coefficients de la matrice.
4. (a) Cette question est en général bien traitée.
(b) Cette question est traitée de manière assez inégale, l'injectivité de la fonction $x \mapsto x(x+4)$ sur $\mathbb{R}_+$ n'apparaît pas souvent clairement.
(c) Il est important et attendu ici de préciser que φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Dire seulement que φ est diagonalisable parce qu'elle admet $n+1$ valeurs propres distinctes n'est pas suffisant.
(d) Cette question assez peu traitée dans son intégralité. Ceux qui l'abordent en général prouvent correctement que la dimension des sous-espaces propres est 1 mais rares sont ceux qui prouvent correctement l'existence d'un polynôme unitaire engendrant un sous-espace propre donné. L'unicité d'un tel polynôme est encore plus rarement faite.
(e) Cette question est en général bien traitée.
(f) Beaucoup oublient de préciser que G_2 est unitaire et d'utiliser l'unicité de la question 4.(d).
(g) Cette question n'a été que peu traitée et n'a été traitée correctement que dans un très faible nombre de copies.
5. (a) Cette question est en général bien traitée.
(b) La non-nullité de Q n'a presque jamais été évoquée.
(c) Cette question n'a été que peu traitée et n'a été traitée correctement que dans un très faible nombre de copies.
6. La définition d'un produit scalaire est en général connue. Cependant écrire que la bilinéarité découle directement de la linéarité de l'intégrale ou que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique n'est pas acceptable. Un raisonnement propre et détaillé est attendu.

Pour le caractère défini du produit scalaire, la continuité de l'intégrande est trop souvent oubliée. De même un argument du type « par stricte positivité de l'intégrale » n'est pas suffisant.

7. (a) La validité du changement de variable proposé n'a que très peu été faite de manière correcte. On a ainsi pu lire trop souvent de arguments du type « la fonction sin est bijective de $[0, 1]$ ou de $\mathbb{R}$ ou de $[-1, +1]$ vers $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ». La classe $\mathcal{C}^1$ et la stricte monotonie ne sont que peu évoquées.
- (b) Cette question est globalement réussie quand elle a été abordée.
- (c) Cette question est abordée de manière assez inégale. Parmi ceux qui ont compris le raisonnement à mener on déplore beaucoup trop d'erreurs de calculs.
8. (a) Bien trop d'erreurs de calcul ont été rencontrées pour un simple calcul de dérivée. Ce calcul de dérivée pose de nombreux problèmes et donne parfois des résultats très surprenants: $-5t^4$, car $(1 - t^2)^{5/2} = 1 - t^5$, ou encore $P' = 1$ et $P'' = 0$.
- (b) Quand elle est traitée cette question est bien faite, les hypothèses sont correctement vérifiées.
- (c) Cette question est en général bien traitée.
- (d) Beaucoup pensent que puisque φ est symétrique alors toute base de vecteurs propres est orthogonale. Ici le fait que les vecteurs propres soient associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est très important et rarement précisé.
- (e) Quand elle est abordée, cette question est assez bien traitée.
9. (a) Cette question est peu abordée, mais quand elle est abordée, elle est bien traitée.
- (b) Répondre seulement « après le cours » ne peut être suffisant.
- (c) Cette question est peu traitée, les quelques copies qui la traitent oublient souvent de justifier l'unicité des coefficients.
- (d) Cette question est peu traitée.
- (e) Une question d'application directe d'une formule qui n'a été que peu traitée. Les copies qui la traitent le font souvent de manière incorrecte en prenant $k = 3$ dans la formule de la question 9.(c).
10. (a) Cette question est très peu abordée, les rares codes proposés sont non fonctionnels. L'implémentation d'un polynôme par un tableau stockant ses coefficients est rarement comprise.
- (b) Cette question est très peu abordée, seule une poignée de copies proposent une fonction pertinente et répondant à la question.

Problème

1. (a) Beaucoup d'erreurs sur cette question, on peut, entre autres citer l'oubli d'un facteur x car la somme ne commence pas à $k = 0$ ou encore une confusion avec la somme de la série géométrique de raison x .
- (b) Là encore peu de bonnes réponses ont été fournies.
- (c) La loi géométrique est bien reconnue même si on peut regretter des explications laconiques, incomplètes voire inexistantes. Le paramètre est souvent erroné.

- (d) Les calculs sont en général bien menés mais l'indépendance des événements en jeu est souvent oubliée.
- 2. (a) Cette question est rarement traitée, et quand elle est traitée, l'espérance donnée dépend de n , ou k .
(b) Cette question est très peu traitée, la « réinitialisation » du processus n'a pas été comprise.
- 3. (a) Cette question est peu traitée. Le bon système complet d'événements à utiliser est rarement vu.
(b) Cette question est très peu abordée.
- 4. De nombreuses confusions entre $[0, d]$ et $\llbracket 0, d \rrbracket$.
Il est inutile de répondre à des questions qui ne sont pas posées, en particulier ici cela ne sert à rien de vouloir donner la variance (surtout qu'elle est souvent donnée fausse) quand celle-ci n'est pas demandée.
- 5. (a) Cette question est en général bien traitée.
(b) Attention à l'utilisation du produit de convolution discret. Il faut citer l'indépendance! et expliquer les valeurs prises par l'indice de sommation i (en particulier la valeur maximale).
(c) Cette question est rarement abordée. Le résultat étant donné, certains tentent d'« arnaquer ». Inutile de préciser qu'une telle tentative est vaine et met rarement le correcteur dans de bonnes dispositions.
(d) Cette question est rarement abordée.
- 6. (a) De bonnes surprises sur cette question d'informatique, quelques copies proposent des fonctions pertinentes.
(b) Cette question peu traitée, encore plus rarement de manière correcte.
(c) Trop peu de conjectures pertinentes et clairement exposées. On lit souvent « $E(T)$ converge vers e » sans préciser quelle variable tendait vers quoi.
- 7. Cette question, pourtant très classique a peu été abordée et rarement de manière correcte.
(a) Cette question est peu traitée. Les candidats qui ont traité cette question ont souvent compris l'idée mais ont parfois trafiqué leurs calculs pour aboutir au résultat.
(b) Cette question est rarement traitée. Beaucoup sont prêts à écrire n'importe quoi du moment qu'ils arrivent au résultat.
(c) Cette question est très peu traitée et encore moins de manière correcte.
(d) Cette question est en général correcte lorsqu'elle est abordée.
- 8. (a) Un coefficient $(-1)^k$ apparaît souvent dans le calcul de la dérivée $k^{\text{ème}}$.
(b) Cette question est rarement traitée. Les candidats qui l'abordent le font toutefois en général bien.
(c) Cette question est traitée seulement dans une poignée de copies.
(d) Cette question est très rarement abordée et le plus souvent de manière incorrecte.
(e) Cette question est bien réussie quand elle a été abordée.
- 9. (a) Trop d'erreurs dans cette question de cours ont été rencontrées. Très souvent les densités données sont fausses, l'espérance et la variance sont, elles, en général correctes.
(b) Cette question est traitée de manière assez inégale.
(c) Le produit de convolution ne semble pas maîtrisé, les calculs sont confus et souvent incorrects, l'indépendance rarement évoquée.

- (d) Peu se rendent compte qu'il faut traiter le cas $x \in [d, 2d]$.
10. (a) Beaucoup d'arguments fantaisistes sont proposés.
(b) Cette question est très peu réussie. La structure de la question n'est pas comprise. Bien trop de copies pensent que l'hypothèse est faite pour tout entier n et remplacent donc n par $n + 1$ dans l'hypothèse.
11. Cette question est une question d'application directe des formules précédentes. Trop peu de candidats osent aborder cette question en admettant les précédentes.
12. (a) Cette question sans vraie difficulté est très peu traitée pourtant. Les rares candidats qui la traitent le font correctement.
(b) Cette question est très peu traitée et rarement de manière claire et convaincante.
(c) Cette question est traitée seulement dans une poignée de copies.